

線形代数学II 期末試験的なレポート問題

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

とする。

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{とし、}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & X & Y \\ 0_3 & A_2 & Z \\ 0_3 & 0_3 & A_3 \end{pmatrix}$$

とおく。つまり

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

このとき次の問いについてできるだけ答えなさい。

- A の固有値と固有ベクトルをそれぞれ求めよ。
- $p_A(X) = (X - 3)^3 q(X)$. $q(X) = (X - 4)^3 (X - 5)^3$
 $a(X) = (1 - q(X)/q(3))^3$ とおくと、
- $a(X)$ は $(X - 3)^3$ で (多項式として) 割り切れる. (単に命題が書いている項目については、「その項目のことを確かめるもしくは証明せよ。」の意味です。以下も同様)
- $a(X)^2 - a(X)$ は $q(X)$ で (多項式として) 割り切れる.
- A の 4 弱固有空間の基底を求めよ。答えには「 $W = a(A)$ の第??列」という表記を用いてもよい。

なお、参考までに、 $W = a(A)$ は計算機によればつぎのようであるらしい。 $W = a(A) = (1_9 - q(A)/q(\lambda))^3 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -\left(\frac{3}{4}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{4} & -\left(\frac{7}{4}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$