

## 多変数の微分積分演習問題 No.2

以下(次回以降も)命題が単に書いてある場合には「それを示せ」の意味です。さらに、いくつかの非自明な点がある場合には、それらもすべて示してください。

**問題 2.1.**  $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R}$  は  $\mathbb{R}^2$  の各点で連続である。

**問題 2.2.**  $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^2$  は  $\mathbb{R}$  の各点で連続である。

**問題 2.3.**

$$f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

は原点  $(0, 0)$  において、極限を持たない。

**問題 2.4.**

$$f_2(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$$

は原点  $(0, 0)$  において、極限を持たない。

**問題 2.5.**  $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto 1/x$  ( $x \neq 0$ ) は  $f(0)$  をどのように定義しても 0 で連続な関数には延長されない。

**問題 2.6.**  $f: \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto y/x$  ( $x \neq 0$ ) は  $f(0, 0)$  をどのように定義しても  $(0, 0)$  で連続な関数には延長されない。

**問題 2.7.** 任意の  $n$  変数多項式関数  $f$  について、 $f$  は  $\mathbb{R}^n$  の各点において連続である。

**問題 2.8.**

$$f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

は  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  で有界である。(sup と inf を求めよ。)

**問題 2.9.**

$$f_2(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$$

は  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  で有界である。(sup と inf を求めよ。)