多変数の微分積分演習問題 No.5

以下の各問において、とくに断りのない限り $\mathbb{R}^n$ にはノルム $||(v_1, v_2, \ldots, v_n)|| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$ が入っているものとする。

定理 5.1. 任意の非負連続関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して、f は $[0,1]$ で *(リーマン)* 積分可能で、なおかつ

$$\int_0^1 f(x)dx \geq 0$$

である。

を以下では自由に使って良いことにする。

問題 5.1. $[0,1]$ 上の非負値連続関数 $f(x)$ が与えられていたとする。

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

が成り立つのは $[0,1]$ の各点 t で $f(t) = 0$ が成り立つときに限る。

以下ではさらに、リーマン積分の加法性

$$\int_0^1 (f+g)dx = \int_0^1 (f)dx + \int_0^1 (g)dx$$

も使って良いこととする。

問題 5.2. $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}; f : \text{連続}\}$ に $\langle f \bullet g \rangle$ を以下のように導入する。

$$\langle f \bullet g \rangle \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

$(C[0,1], \langle \bullet \rangle)$ は計量ベクトル空間であることを示しなさい。

問題 5.3. $[0,1]$ 上の $\mathbb{R}^n$-値連続関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ が与えられていたとする。$f(t)=(f_1(t),f_2(t),\dots,f_n(t))$ $(t\in[0,1]))$ と成分で書いた時、各 f_i $(i=1,2,\dots,n)$ はそれぞれ一様連続であることを示しなさい。ただし 有界閉区間 $[0,1]$ 上の一変数実数値連続関数に関する一様連続性の定理は証明なしに使って良いこととする。

問題 5.4. 前問と同じ仮定のもとで、f は次の意味で一様連続であることを示しなさい。

$\epsilon>0\exists\delta>0$ such that $(t_1,t_2\in[0,1],|t_1-t_2|<\delta \implies ||f(t_1)-f(t_2)||<\epsilon)$

問題 5.5. $I=[0,1]$ 上の任意の連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ は区分的に定数であるような関数で一様に近似できる。すなわち、f が与えられた時、任意の $\epsilon>0$ に対して、ある $N\in\mathbb{Z}_{>0}$ と I の分割 ($N+1$ 分割)

$$(I=[0,a_1]\cup[a_1,a_2]\cup\dots[a_N,1]=I_1\cup I_2\cup\dots\cup I_N)$$

$(a_0=0<a_1<a_2<\dots<a_N<1=a_{N+1}$) と I 上の関数 h で、

1. h は 各開区間 $\overset{\circ}{I}_i=(a_i,a_{i+1})$ $(i=0,1,\dots,N$) 上で定数関数に等しい. (“h は区分的に定数である。” と称する)
2. $\sup_{t\in I}|(h(t)-f(t))|\le\epsilon$. (“$h$ は f の ϵ-近似である。” と称する)

を同時にみたすものが存在する。

問題 5.6. 連続関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ と, f の ϵ-近似であって、区分的に定数であるような関数 h が与えられているとする。このとき、

$$||\int_I f(t)dt-\int_I h(t)dt||\le\epsilon$$

問題 5.7. 任意の連続関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ に対して、$f,||f||$ はともに $[0,1]$ で積分可能であり、

$$||\int_0^1 f(x)dx||\le\int_0^1||f(x)||dx$$

であり、等号が成り立つのは $[0,1]$ の各点 t で $f(t)=0$ が成り立つときに限る。

問題 5.8. f が $a = (a_1, a_2)$ の ϵ-近傍 $B_\epsilon(a)$ で C^1 級の時、$(h_1, h_2) \in B_\epsilon(a)$ に対して、

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = h_2 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}|_{(a_1+h_1, a_2+th_2)} dt + h_1 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}|_{(a_1+sh_1, a_2)} ds$$

であることを示せ。

問題 5.9. 前問と同じ仮定のもとで、前問の結論を用いて、f は a で全微分可能であることを示せ。

※ 以上 2 問と同様なことを、一般の n 変数についても同様に証明できるが、単純に面倒なだけなので以上 2 問が溶けたあとは n 変数についても同様の結果を証明せずに使って良いことにする。

問題 5.10. $u = x, v = 3x + y$ とおく。このとき、与えられた一変数多項式関数 $a(t)$ にたいして、$f = a(x + y)$ とおいた時、次の各問いに答えなさい。

1. $f = a(x + y)$ を x で偏微分し、$\frac{\partial f}{\partial x}$ を求めよ。
2. $f = a$ を u, v に変数変換して、$\frac{\partial f}{\partial u}$ を求めよ。
3. 「$x = u$ であるにも関わらず $\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial u}$ は異なる」ということを確認せよ。
4. 前小問のようなことはなぜ起こるのか、説明せよ。

例題 5.1. f を 2 変数関数とする。$f(u(x, y), v(x, y))$ を x で偏微分した答えを $f_u, f_v, f_w, u_x, u_y, ...$ 等を用いて書きなさい。

(答え: $f_u u_x + f_v v_x$)

問題 5.11. f を三変数関数とする。$f(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$ を x で偏微分した答えを $f_u, f_v, f_w, u_x, u_y, ...$ 等を用いて書きなさい。

問題 5.12. $u(t, u)^2 + v(t, u)^2 + w(t, u)^2$ を t で偏微分した答えを u_t, v_t, w_t を用いて書きなさい。