多変数の微分積分演習問題 No.9

定義 9.1. C^2-級関数 $f(x,y)$ の 点 (a,b) における二次近似を求め、その二次の係数が作る行列 を f の (a,b) におけるヘッセ行列とよぶ。つまり、f の (a,b) におけるヘッセ行列 $H(f)|_{(a,b)}$ とは

$$H(f)|_{(a,b)} = \begin{pmatrix} f_{xx}|_{(a,b)} & f_{xy}|_{(a,b)} \\ f_{yx}|_{(a,b)} & f_{yy}|_{(a,b)} \end{pmatrix}$$

のことである。

問題 9.1. 点 (a,b) の近傍で C^2 級な関数 f に対して、f の (a,b) における二次近似を微分 $Df_{(a,b)}$ 及びヘッセ行列 $Hf_{(a,b)}$ を用いて書け.

問題 9.2. $f(x,y) = (\frac{1}{2}-x)(\frac{1}{2}-y)(x+y-\frac{1}{2})$ の $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ における二次近似を求める。二次の係数が作る行列 (ヘッセ行列) を H とおく。適当な変数変換をして、H を対角行列にせよ。

定義 9.2. 複素数 $z = a+bi$ $(a,b \in \mathbb{R})$ に対し、その実部 a を $\Re(z)$, 虚部 b を $\Im(z)$ とよぶ。

以下本演習では、複素解析学の基本事項は自由に使って良いことにする。

問題 9.3. $f_2(x,y) = \Im(e^{(x+iy)})$ とおく。f を $(0,0)$ で二次近似せよ。

問題 9.4. $f_3(x,y) = \Re(e^{(x+iy)})$ とおく。f を $(0,0)$ で二次近似せよ。

問題 9.5. 複素数 z_0 近傍で正則な複素正則関数 $f(z)$ に対して、$f''(z_0) = a+bi(a,b \in \mathbb{R})$ とする。$g(x,y) = \Re(f)(x+yi)$ の z_0 におけるヘッセ行列を a,b を用いて書け。

問題 9.6. 複素数 z_0 近傍で正則な複素正則関数 $f(z)$ に対して、 $f''(z_0) = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ とする。$h(x, y) = \Im(f)(x + yi)$ の z_0 におけるヘッセ行列を a, b を用いて書け。

問題 9.7. 複素数 z_0 近傍で正則な複素正則関数 $f(z)$ が、$f(z_0) = 0$ を満たすとする。$k(x, y) = f(x + yi)\overline{f(x + yi)}$ の z_0 における二次近似を $f'(z_0)$ を用いて書け。

問題 9.8. $z_0 \in \mathbb{C}$ の近傍で正則な複素正則関数 $f(z)$ にたいして、

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \Re(f(x + iy)) \\ \Im(f(x + iy)) \end{pmatrix}$$

とおく。 $z_0 = p + qi$, $f'(z_0) = a + bi$ とするとき、$DF|_{(p,q)}$ を a, b を用いて表せ。

問題 9.9. 前問とコーシーリーマンの等式の関係を論ぜよ。