

多変数の微分積分演習問題 No.10

問題 10.1. $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\|(x_1, \dots, x_n)\|^2, x_2, \dots, x_n)$$

で定義する。(ただし $\|\bullet\|$ は通常ノルム。) さらに、 $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ とおく。このとき、次のことを確かめよ。(難しいところは「流す」程度でも良い。)

1. $D\Phi|_{e_1}$ を求め、それが可逆である。
2. $W = \{(1, x_2, \dots, x_n) | x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ と実質的に同一視できる。
3. $\Phi^{-1}W = S^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$.
4. 逆写像定理により、十分小さい $\epsilon > 0$ にたいして、 $X = (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \times B_0(\epsilon)$ とおけば、 Φ は $\Phi^{-1}(X)$ と X との全単射を与える。
5. その全単射とその逆写像はともに C^1 -球である。(Φ は「微分同相」であるという。)

上記問題により、 Φ は $\mathbb{R}^{n-1}$ と $\mathbb{R}^{n-1}$ のそれぞれの開集合同士の全単射を与えることがわかる。

問題 10.2. 次の積分を求めよ。

$$\int_D x^2 y dx dy; \text{ただし } D = \{(x, y); 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$$

問題 10.3. 次の積分を求めよ。

$$\int_D \sin(x + y) dx dy; \text{ただし } D = \{(x, y); 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq \pi/2\}$$

問題 10.4. 次の積分を求めよ。

$$\int_D e^{y/x} dx dy; \text{ ただし } D = \{(x, y); 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

問題 10.5.

$$\int_D x^2 y^2 dx dy \text{ ただし } D = \{(x, y); |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

問題 10.6. 次の積分を求めよ。 ($R \in \mathbb{R}_{>0}$)

$$\int_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy \text{ ただし } D = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

問題 10.7. 次の積分を求めよ。

$$\int_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy \text{ ただし } D = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0\}$$

問題 10.8. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とおく。このとき $\int_V 1 dx dy dz$ をもとめよ。(答え方が異なるたびに1点)