多変数の微分積分 No.4要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$《偏微分と全微分》

多変数関数から、「他の変数を止めて一つだけの変数に着目する」ことにより、一変数関数を得ることができる。その意味で多変数関数はの微積分について、ある程度は知っていることになる。

定義 4.1. $\mathbb{R}^n$ の開集合 U から $\mathbb{R}$ への写像 (関数) f が点 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$ で変数 x_j について **偏微分可能**であるとは、x_j 以外の変数を止めて、一変数関数

$$x_j \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_n)$$

を考えたときに、これが $x_j = a_j$ で微分可能のときに言う。その微分係数のことを、

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n) \text{ とか } \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \text{ とか } f_{x_j}(a)$$

などと書く。

補題 4.2. 上の定義の仮定の下に、f が a で変数 x_j について偏微分可能であることは、ある $c \in \mathbb{R}$ があって、

$$\begin{aligned} &f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_n) \\ =&f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_n) + ch + o(|h|) \end{aligned}$$

が成り立つことと同値である。

偏微分係数は、「一つの変数だけを少しだけ動かすとどうなるか」について語ってくれる数である。ではいろいろな変数をそれぞれ少しだけ動かすとどうなるだろうか?

定義 4.3. $\mathbb{R}^n$ の開集合 U から $\mathbb{R}$ への写像 (関数) f が点 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$ で**全微分可能**であるとは、ある $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ があって、

$$\begin{aligned} &f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3, \dots, a_n + h_n) \\ =&f(a_1, a_2, a_3 \dots, a_n) \\ &+c_1 h_1 + c_2 h_2 + c_3 h_3 + \dots + c_n h_n \\ &+o(||(h_1, h_2, \dots, h_n)||) \end{aligned}$$

が成り立つときにいう。この状況を形式的に記述するために

$$df|_a = c_1 dx_1 + c_2 dx_2 + \dots c_n dx_n$$

と書いて、f の a での全微分とよぶ。

例 4.1. $f(x,y)=x^3y^2$ の $(1,2)$ での微分を求めよう。$x=1+\Delta x, y=2+\Delta y$ と書いて、$f(x,y)$ を $\Delta x, \Delta y$ で書き表すと

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (1+\Delta x)^3(2+\Delta y)^2 \\
&=(1+3\Delta x)(4+4\Delta y)+(\Delta x, \Delta y \text{ に関する二次以上の項}) \\
&=4+12\Delta x+4\Delta y+(\Delta x, \Delta y \text{ に関する二次以上の項})
\end{aligned}$$

ゆえに、

$$df|_{(1,2)}=12dx+4dy$$

上の例や定義で、dx や Δx は、d や Δ と x との積という意味ではない。それ自身で一つの変数だと思って頂きたい。

多変数の微分はベクトルと行列の記法を使ったほうがすっきりする。以下では $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{R}^m$ の元は (紙面の都合で横に書いている場合もあるが、基本的には全部) 「縦ベクトル」だと思って頂きたい。

定義 4.4. $\mathbb{R}^m$ の開集合 U から $\mathbb{R}^n$ への写像 f が点 $a \in U$ で**全微分可能**であるとは、ある $L \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ があって、

$$f(a+h) = f(a) + Lh + o(||h||) \qquad (||h||: \text{ 充分小 なる } h \in \mathbb{R}^n \text{ について})$$

が成り立つときにいう。L のことを f の a での **(全) 微分**といい、$Df|_a$ と書く。(他の文献では $Df|_a$ はまたしばしば Jacobi 行列とも呼ばれる。)

例 4.2. 写像 $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to (x^2, x^3 + y^3) \in \mathbb{R}^2$ の $(1, 1)$ における全微分を求めよう。$x = 1 + \Delta x, y = 1 + \Delta y$ と書くと,

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1+\Delta x)^2 \\ (1 + (\Delta x)^3 + (1+\Delta y)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\Delta x \\ 3\Delta x + 3\Delta y \end{pmatrix} + o\left(\left|\left|\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}\right|\right|\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o\left(\left|\left|\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}\right|\right|\right) \end{aligned}$$

ゆえに

$$Df|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

全微分は、f の一次近似を与える。偏微分は x が軸方向から a に近づくときの $f(x)$ の挙動を与えているから、全微分が分かっていれば偏微分は自動的に全微分から計算できることになる。

定理 4.5. $\mathbb{R}^m$ の開集合 U から $\mathbb{R}^n$ への写像 f が $a \in U$ で全微分可能であるとする。このとき、

1. f は a で連続である。

2. $$Df_a = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a) \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(a) \ldots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n}(a) \\ & \ldots & & \\ & \ldots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_3}(a) \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

実用上は、偏微分のデータを用いて全微分の行列成分を得るという風に上の定理が使われることが多い。

問題 4.1. 例 4.2 のようにして、写像

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (x^2 z, x^3 z + y^3 z^2 + 5) \in \mathbb{R}^2$$

の $(1, 1, 5)$ での全微分を求めなさい。