多変数の微分積分 No.7要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$多変数関数のテイラー展開

定理 7.1. *(定理 6.1 として既出)* $\mathbb{R}^l$ の開集合 U から $\mathbb{R}^m$ への C^1 級写像 f について、U の点 a と $x = a + h$ とを含む線分が U に含まれているとするとき、等式

$$f(a+h) = f(a) + \int_0^1 Df(a+th) \cdot hdt$$

が成り立つ。

これを h の成分を用いて書くと次のようになる。

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{l} \int_0^1 f_{x_j}(a+th)h_j dt$$

定理の証明には

$$g(t) = f(a+th)$$

にたいして微分積分学の基本定理を行えば良い。

定理 7.2. f が $I = [0,1]$ を含むような開区間上の C^{n+1} 級関数のとき、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

定理 7.3. $\mathbb{R}^l$ の開集合 U から $\mathbb{R}^m$ への C^{n+1} 級写像 f について、U の点 a と $x = a + h$ とを含む線分が U に含まれているとするとき、等式

$$\begin{aligned} f(a+h) =& f(a) + \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_l \leq n} \frac{1}{j_1! \dots j_l!} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_l} f}{(\partial x_1)^{j_1} \dots (\partial x_l)^{j_l}}(a) h_1^{j_1} h_2^{j_2} h_3^{j_3} \dots h_l^{j_l} \\ &+ \int_0^1 (1-t)^n \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_l = n+1} \frac{1}{j_1! j_2! \dots j_l!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_l^{j_l}}(a+th) h_1^{j_1} h_2^{j_2} h_3^{j_3} \dots h_l^{j_l} dt \end{aligned}$$

が成り立つ。

上の式は繁雑すぎて見にくいかも知れない。次のような作用素 $\mathfrak{d}_h$ を (この講義だけで通じる記号だが) 導入する。

$$\mathfrak{d}_h = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + h_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \cdots + h_l \frac{\partial}{\partial x_l}$$

すると、上の定理の式は次のようにも書くことができる。

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(\mathfrak{d}_h^k f)(a) + \quad \int_0^1 (1-t)^n \frac{(\mathfrak{d}_h^{n+1} f)(a+th)}{n!} dt$$

が成り立つ。

二変数の場合について、テイラー展開がどういう形に見えるかについては教科書も参照のこと。

問題 7.1. 定理 7.3 に基づいて、$f(x,y) = \sin(xy^2)$ について、$f(a+h, b+k)$ の h, k についての 2 次近似を求めなさい。できることならば剰余項の積分表示も求めてみること。

多変数のテイラー展開を扱う際のもう一つの方法として、多重指数を用いる方法もある。$J = (j_1, j_2, j_3, \dots, j_l)$ に対して、

- $J! \overset{\text{def}}{=} j_1! j_2! \dots j_l!$ と書く。
- $\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_l} f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_l^{j_l}}$ を $f^{(J)}$ と書く。
- $h_1^{j_1} \dots h_l^{j_l}$ を h^J と書く。
- $j_1 + \cdots + j_l$ を $|J|$ と書く

すると、Taylor 展開は次のように書くことができる。

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{|J| \leq n} \frac{1}{J!} f^{(J)}(a) h^J + \sum_{|J|=n+1} \int_0^1 f^{(J)}(a+th) dt \cdot h^J$$