

今日のテーマ 逆写像の定理, 陰関数の定理。

定義 9.1. 1. $\mathbb{R}^m$ のベクトル $v = (v_1, v_2, \dots, v_m), w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ に対して二つの内積を $\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^m v_j w_j$ で定義するのであった。

2. $\mathbb{R}^m$ のベクトル v のノルムを $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ で定義する。

3. (v, w) のこの講義で用いられる距離 (ユークリッド距離) は $d(v, w) = \|v - w\|$ で定義するものと一致する。)

4. 行列 $P \in M_{l,m}(\mathbb{R})$ に対し、その作用素ノルムを

$$\|P\| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^m \\ \|v\| \leq 1}} \|P \cdot v\|$$

で定義する。

一般に、ベクトルや行列に対するノルムの定義はいくつもあり、その時々により便利なものを用いるのが良い。ここでは横着して上のもののみを考えることにする。

補題 9.2. 1. 内積は双線型である。

2. ベクトルに対してのノルム $v \mapsto \|v\|$ はノルムの公理を満たす。すなわち、

$$(a) \forall v \in \mathbb{R}^m \quad \|v\| \geq 0.$$

$$(b) \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

$$(c) \forall v, w \in \mathbb{R}^m \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

$$(d) \forall c \in \mathbb{R} \forall v \in \mathbb{R}^m \quad \|cv\| = |c| \cdot \|v\|.$$

3. 行列 P に対して、その作用素ノルムは常に有限であり、 $P \mapsto \|P\|$ はノルムの公理を満たす。

4. 任意の行列 P と (それと乗算可能なサイズを持つ) 任意のベクトル v に対して $\|P \cdot v\| \leq \|P\| \cdot \|v\|$ が成り立つ。

定理 9.3. [逆関数の定理 (part 1) 存在性)] U は $\mathbb{R}^m$ の開集合であるとし、 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ は C^1 級であるとする。(定義域と値域の次元が同じであることに注意。) $x_0 \in U$ において、 $Df|_{x_0}$ が行列として可逆であると仮定し、その逆行列を L とおく。正の実数 r_0 を次のような条件を満足するようにとる。

$$x \in B_0 \stackrel{\text{def}}{=} B_{r_0}(x_0) \implies \begin{cases} x \in U & (\text{つまり、} B_{r_0}(x_0) \subset U.) \\ \|1_m - Lf'(x)\| < \frac{1}{2} \\ \|f(x) - f(x_0)\| < \frac{1}{2\|L\|} \end{cases}$$

(f が C^1 級だという仮定によりこのような r_0 は存在する。) このとき、

1. f は B_0 上単射である。

2. $r_1 = \frac{r_0}{2\|L\|}$, $B_1 = B_{r_1}(f(x_0))$ とおくと、 B_1 上定義された C^1 級関数 g が存在して、

$$f \circ g|_{B_1} = id_{B_1}$$

がなりたつ。

定理 9.3 の証明のキモは、以下の補題 (Newton 法) である。ただし、 Df_x の逆行列のところを、 L で置き換える部分が、本物の Newton 法とは異なる。

以下、定理 9.3 の証明のために 2 つの補題を述べる。とりあえず $y_1 \in B_1$ を固定する。

補題 9.4. 次のような B_0 上の $\mathbb{R}^m$ 値関数を考えよう。

$$\Phi(x) = x + L(y_1 - f(x)) \quad (x \in B_0)$$

すると、任意の $x_1, x_2 \in B_0$ に対して $\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| < 1/2\|x_1 - x_2\|$ である。言い換えれば、 Φ は縮小写像である。

証明. 実際

$$\begin{aligned} \|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| &= \|x_1 - x_2 - L(f(x_1) - f(x_2))\| \\ &= \|x_1 - x_2 - L \int_0^1 f'(x_2 + t(x_1 - x_2)) dt (x_1 - x_2)\| \\ &= \left\| \int_0^1 (1_n - Lf'(x_2 + t(x_1 - x_2))) dt (x_1 - x_2) \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|1_n - Lf'(x_2 + t(x_1 - x_2))\| dt \|x_1 - x_2\| \\ &\leq 1/2 \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

□

補題 9.5. 縮小写像はかならず固定点をただ一つ持つ。(やってみよう問題参照。)

補題 9.4, 9.5 により、 $\forall y_1 \in B_1$ に対して $y_1 = f(x_1)$ をみたす $x_1 \in \mathbb{R}^n$ がただ一つ存在することがわかる。 y_1 に x_1 を対応させる写像が g である。

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) + o(\|x_2 - x_1\|)$$

を逆に見ることで g の連続性、微分可能性を得ることができる。(詳しくは 1 変数のときと同様)

定理 9.6.

$$f \circ g = id$$

のとき、

$$Dg|_y = (Df|_{g(y)})^{-1}$$

とくに、 f が C^n 級なら、 g も C^n 級である。

逆写像定理では、定義域と値域の次元が等しく、なおかつ点 x_0 での f の微分 $Df|_{x_0}$ が可逆であることが適用のポイントである。しかし、下のような考え方をを用いて、定義域と値域の次元が違う場合にも、逆関数の定理を応用することができる。ここでは大まかな考え方のみ書いておこう。(詳細は乞御研究)

命題 9.7. (陰関数の定理) $f: \mathbb{R}^{n+s} \rightarrow \mathbb{R}^n$ が C^∞ 級で、なおかつ線型写像

$$\hat{f}: (x, y) \rightarrow (f(x, y), y) \in \mathbb{R}^{n+s} \quad (x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^s)$$

が $\det(D\hat{f}|_{(x_0, y_0)}) \neq 0$ を満足したとする。 $c = f(x_0, y_0)$ とおこう。このとき $\hat{f}$ の局所的な逆写像

$$\hat{g}: (x, y) \rightarrow (g(x, y), y) \quad (x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^s)$$

が存在する。すなわち、 $f(g(x, y), y) = x$ が (c, y_0) に近いすべての x, y に対して成り立つ。とくに、 $h(y) = g(c, y)$ は

$$f(h(y), y) = c$$

をすべての y について満足する。これは、方程式 $f(x, y) = c$ を y について解いたことに相当する (陰関数)。

逆写像の定理や陰関数の定理は微分可能多様体の理論 (とくに埋め込みや沈め込みの議論、特異点の議論など) において基本的になる。