

線形代数学II No.1 要約

今日のテーマ: 授業の目標, ベクトル空間及び線形写像の復習。

「スカラー」の集合を一つ決めておかなければならない。

定義 1.1. K が体であるとは、 K が和、差、積、商について閉じた集合であるときにいう。詳しくいうと K が体であるとは、 K が和 (+)、積 2 つの演算について閉じていて、以下の条件を満たすときに言う。詳しくは体論でやる。

1. K は和について可換群である。すなわち
 - (a) 和は結合的である。 $(a + b) + c = a + (b + c)$ ($\forall a, b, c \in K$).
 - (b) K には 0_K と呼ばれる特別の元があって、 $x + 0_K = x = 0_K + x$ ($\forall x \in K$) がなりたつ。
 - (c) K の任意の元 x に対して、その反元 $-x$ と呼ばれる元が存在して、 $x + (-x) = 0_K = (-x) + x$ を満たす。
2. K は積について可換半群である。つまり、結合法則 $a(bc) = (ab)c$ ($\forall a, b, c \in K$) がなりたつ。
3. 分配法則 $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$ ($a, b, c \in K$) が成り立つ。
4. $K \setminus \{0\}$ は積について群である。つまり
 - (a) K には 1_K と呼ばれる特別の元があって、 $x \cdot 1_K = x = 1_K \cdot x$ ($\forall x \in K$) がなりたつ。
 - (b) K の任意の元 x に対して、その逆元 x^{-1} と呼ばれる元が存在して、 $x \cdot (x^{-1}) = 1_K = (x^{-1}) \cdot x$ を満たす。

本講義では K としては $\mathbb{R}$ をよく用いるが、 $K = \mathbb{C}$ の場合を考えることも時には必要である。

$K = \mathbb{R}$ としたときのベクトル空間を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とか、**実ベクトル空間**といい、 $K = \mathbb{C}$ としたときのベクトル空間を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とか、**複素ベクトル空間**と呼ぶ。

ベクトル空間とは、その中で和とスカラー倍ができるような集合のことである。ただし和とスカラー倍は次の法則を満たす必要がある。

1. $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ ($\forall v_1, v_2, v_3 \in V$).
2. $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ ($\forall v_1, v_2 \in V$).
3. $\exists 0_V \in V$ such that $0_V + v = v + 0_V = v$ ($\forall v \in V$).
4. 任意の $v \in V$ にたいして $-v$ という V の元が取れて $v + (-v) = 0_V$ を満たす。

$$5. c_1.(c_2.v) = (c_1 \cdot c_2).v \quad (\forall c_1, c_2 \in K, \forall v \in V).$$

$$6. 1_K.v = v \quad (\forall v \in V)$$

$$7. (c_1 + c_2).v = c_1.v + c_2.v \quad (\forall c_1, c_2 \in K, \forall v \in V)$$

$$c.(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2 \quad (\forall c \in K, \forall v_1, v_2 \in V)$$

ベクトル空間 V, W にたいして、 V から W への**線形写像**とは、 V から W の写像であって、和とスカラー倍を保つもののことである。

V, W の基底をとることで、線形写像は行列で表せるのであった。行列としては何でもありうるわけだが、基底のとり方を上手に選べば、簡単な行列を扱うだけで済むようにできる場合がある。

とくに、 $V = W$ の場合が本講義の主題である。この場合には、 v と $A.v$ とを比較できるということが一般の場合と異なる。

一番基本的なのは対角行列である。

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

これらは**基本ベクトルたちをその定数倍に写す** という大事な性質を持つ。

本講義では、次のようなことについて学ぶ:

- **計量ベクトル空間** について。

- 計量ベクトル空間とは、「長さ」と「角度」を扱うことのできるようなベクトル空間である。
- シュミットの直交化法
- 直交射影とそれを表す行列

- **正方行列の標準形**について。

- 固有値と固有ベクトル
- 行列の対角化 (できる場合。)
- 弱固有値と弱固有空間
- 行列のジョルダンの標準形 (一般の場合)