

## 線形代数学II No.3 要約

今日のテーマ: 直交基底。正規直交基底

**定義 3.1.** 内積を持つベクトル空間を 計量ベクトル空間 と呼ぶのであった。計量ベクトル空間  $V$  の  $\mathbf{0}$  でない元の集合  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$  が

1. 直交系であるとは、すべての  $i \neq j$  にたいし、 $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$  を満たすときにいう。
2. 正規直交系であるとは、直交系であって、すべての  $i$  に対し  $\|\mathbf{v}_i\| = 1$  のときにいう。

**補題 3.2.**  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  が一次独立のとき、次のような直交系  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  が一意に存在する。

$$(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k) \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

**定理 3.3.**  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  が一次独立のとき、次のような正規直交系  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  が一意に存在する。

$$(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) \begin{pmatrix} c_1 & & * \\ & c_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & c_k \end{pmatrix}$$

( $c_1 c_2 \dots c_k \neq 0$ .)

(この  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  を得るための操作をシュミットの直交化法という。)

**定理 3.4.** 有限次元計量ベクトル空間  $V$  では

1. 正規直交基底が存在する。
2. 任意の正規直交系は正規直交基底に延長できる。
3. 任意の直交系は直交基底に延長できる。