

## 線形代数学II No.4要約

今日のテーマ: 直交補空間と直交射影

**定義 4.1.** 計量ベクトル空間  $V$  の部分空間  $U$  に対して、

$$\{\mathbf{x} \in V; \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\forall \mathbf{u} \in U)\}$$

のことを  $U^\perp$  と書き、 $U$  の直交補空間と呼ぶ。

**補題 4.2.** 計量ベクトル空間  $V$  の部分空間  $U$  に対して、

1.  $U^\perp$  は  $V$  の部分空間である。
2.  $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$ .
3.  $(U^\perp)^\perp \supset U$ .
4.  $U$  が有限次元なら、 $U + U^\perp = V$ . したがって (上のことと併せて)  $V = U \oplus U^\perp$  である。

**問題 4.1.** 計量ベクトル空間  $V$  の部分空間  $U$  に対して、 $U^\perp$  が有限次元であれば、 $V = U \oplus U^\perp$  であることを示しなさい。

**補題 4.3.** 計量ベクトル空間  $V$  の部分空間  $U$  が、 $V = U \oplus U^\perp$  をみたすと仮定する。このとき、任意の  $\mathbf{v}$  は一意的に

$$\mathbf{v}_U + \mathbf{v}_{U^\perp} \quad (\exists \mathbf{v}_U \in U, \exists \mathbf{v}_{U^\perp} \in U^\perp)$$

と書ける。(教科書とは記号の使い方が違うので注意。教科書では  $\mathbf{v}_U$  のことは  $\mathbf{v}^!$ ,  $\mathbf{v}_{U^\perp}$  のことは  $\mathbf{v}^\perp$  と書かれている。)

**定義 4.4.** 補題 4.3 の状況のもとで、写像

$$V \ni \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_U \in V$$

のことを  $U$  への直交射影と呼ぶ。

**例 4.1.** 計量ベクトル空間  $V$  とそのベクトル  $\mathbf{v}$  に対して、 $U$  を  $\mathbf{v}$  で生成される一次元ベクトル空間に採ると

$$\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} + \left( \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} \right)$$

が対応する分解である。言い換えると

$$\mathbf{x}_U = \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{x}_{U^\perp} = \left( \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} \right).$$

一次独立なベクトルの有限列  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  から始めて、 $v_1$  を上記の  $v$  として上記操作を行い、 $\{\frac{1}{\|v_1\|}v_1, (v_2)_{U_1^\perp}, \dots, (v_n)_{U_1^\perp}\}$  を考えると一番目のベクトルに関して「きれいな」ベクトルの列を得る。これを繰り返すことにより正規直交系を得るのがシュミットの直交化法である。

**定義 4.5.** 計量ベクトル空間の部分集合  $A, B$  について、 $A$  のどの元も  $B$  の各元と直交する時、 $A \perp B$  と書く。すなわち、

$$A \perp B \Leftrightarrow (a \cdot b = 0 \quad (\forall a \in A \forall b \in B))$$

**補題 4.6.**  $V$  は有限次元の計量ベクトル空間であるとする。このとき、 $V$  の部分空間  $U_1, U_2$  にたいして、つぎは同値である。

1.  $U_1 + U_2 = V$  かつ  $U_1 \perp U_2$ .
2.  $U_2 = U_1^\perp$