

線形代数学II No.10 要約

今日のテーマ: 行列の三角化。

今回も引き続き、行列は複素数体 \mathbb{C} 上で考える。

定理 10.1. n 次正方行列 A は常に三角化可能である。すなわち、ある上半三角行列と相似である。

定義 10.2. \mathbb{C} 係数の n -次正方行列 A と一変数多項式 $f(x)$ に対して、 $f(A)$ を次のように定義する:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

にたいして、

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E_n.$$

系 10.1 (定理 10.1 の系: Cayley-Hamilton). 行列 A の固有多項式 f_A を考える。 f_A に行列 A を代入したもの $f_A(A)$ はゼロ行列に等しい。

定理 10.1 の証明には次のことを用いる。

補題 10.3. 正方行列 A_1, A_2 が相似、すなわちある正則行列 P が存在して $A_1 = P A_2 P^{-1}$ であるとき、 $f(A_1) = P f(A_2) P^{-1}$.

補題 10.4. $n \times n$ -行列 A が、 $(n-1) \times (n-1)$ -行列 B と定数 λ を用いて、 $A = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ と表せているとき、

1. $A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & * \\ 0 & B^n \end{pmatrix}$

2. もっと一般に、任意の一変数多項式 $f(x)$ に対して、

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & * \\ 0 & f(B) \end{pmatrix}$$

注意 10.1. 補題 10.4 は λ のところが数ではなく、行列であっても (つまり、ある $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ にたいして λ が $k \times k$ -行列、 B が $(n-k) \times (n-k)$ 行列であっても) 同様に成り立つ。(A は λ と B の直和であると表現する。)