

線形代数学II裏 No.1 テンソル積とは

講義で「テンソル積とはなにか」という疑問を受けたが、これを短時間で説明するのは難しく、講義中に解説するのは本講義の趣旨とは異なってしまう。そこでここにちょっとだけ書いておくことにする。とりあえず、「エエカゲンバージョン」である。もし質問、誤植、希望等があれば土基までご連絡を。

1 ベクトル空間のテンソル積

1.1 有限次元、基底の与えられたベクトル空間のテンソル積

以下、 K を体とする。不慣れな $K = \mathbb{R}$ または $K = \mathbb{C}$ と考えてもよい。

定義 1.1. V, W を K 上の有限次元ベクトル空間、 $\{e_1, \dots, e_n\}, \{f_1, \dots, f_m\}$ をそれぞれ V, W の基底とする。 $n = \dim V, m = \dim W$ である。このとき、形式的な元

$$\{e_i \otimes f_j; i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}$$

を基底とする nm 次元の K -ベクトル空間を $V \otimes W$ で書き表し、 V と W のテンソル積と呼ぶ。言い換えれば、 $V \otimes W$ とは形式的な和

$$\sum_{i,j} a_{ij} e_i \otimes f_j \quad (a_{ij} \in K)$$

の集まりである。

例えば $n = 2, m = 3$ であれば

$$\begin{array}{ccc} e_1 \otimes f_1, & e_1 \otimes f_2, & e_1 \otimes f_3, \\ e_2 \otimes f_1, & e_2 \otimes f_2, & e_2 \otimes f_3 \end{array}$$

の 6 つの元を基底とするベクトル空間が $V \otimes W$ である。

四角で囲うのはいかにも大仰である。しかも $e_i \otimes f_j$ という記号は要するに i, j しか関係しないので $[i, j]$ とでも書いておけばそのほうがラクなぐらいだ。下を参照のこと。

定義 1.2. V, W を K 上の有限次元ベクトル空間、 $\{e_1, \dots, e_n\}, \{f_1, \dots, f_m\}$ をそれぞれ V, W の基底とする。 $v \in V$ と $w \in W$ のテンソル積 $v \otimes w$ が、次のように定義される

$$\left(\sum_i v_i e_i\right) \otimes \left(\sum_j w_j f_j\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j} v_i w_j e_i \otimes f_j$$

この定義に従えば、とくに

$$e_i \otimes f_j = \boxed{e_i \otimes f_j}$$

であるから、四角で囲う必要がなくなる。

命題 1.3. $(v, w) \in V \times W \rightarrow V \otimes W$ は双線形である。すなわち、

1. $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$ $(\forall v_1, \forall v_2 \in V, \forall w \in W)$.
2. $(cw) \otimes w = c(v \otimes w)$ $(\forall c \in K, \forall v \in V, \forall w \in W)$.
3. $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$ $(\forall v \in V, \forall w_1, \forall w_2 \in W)$.
4. $v \otimes cw = c(v \otimes w)$ $(\forall c \in K, \forall v \in V, \forall w \in W)$.

これで、有限次元のベクトル空間のテンソル積については(基底さえとれば)おしまいである。

1.2 基底のとり方を変えるとどうなるか

V の基底二組 $\{e_i\}, \{e'_j\}$ と W の基底二組 $\{f_k\}, \{f'_l\}$ とがあったとする。

$$e'_j = \sum_i p_{ij} e_i \quad f'_l = \sum_k p_{kl} f_k$$
$$e'_j \otimes f'_l = \sum_{i,k} p_{ij} q_{kl} (e_i \otimes f_k)$$

これがテンソル積の基底の変換則ということになる。

1.3 抽象的な定義と一般の環上の加群のテンソル積

実際にはテンソル積は基底に依らずに(若干抽象的に)定義するのほう
が現代的である。近頃は wikipedia にも定義があるので興味のある人は
参照のこと。

K のところを一般の環に置き換えれば、加群のテンソル積を定義するの
はさほど難しくない。(ただし、その挙動はかなり体上の話とは異なる。)

1.4 3つ以上のベクトル空間のテンソル積

ベクトル空間 V_1, V_2, V_3 に対して、テンソル積 $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ などが
定義される。これは $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ と同型であることがわかる。これを
 $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ と書く。4つ以上のベクトル空間のテンソル積も同様に定義
される。

2 ベクトル場 etc のテンソル積

「テンソル」と呼ぶときにイメージするものは前節のテンソル積とはかなり違うかもしれない。どういうことなのか手短かに書いておくことにする。「族」「場」という言葉で説明するが、実際の現場では「ファイバー束のセクション」だったり「層のセクション」だったりいろいろな扱いと呼ばれ方をする。

2.1 族

「族」について話す必要がある。多様体などの「空間」 M を考える。各点 $x \in M$ 上に仮想的に人間がいると考えて、それぞれの人がそれぞれ独自に (別々に) 数学の問題を考えていることを想像するとよい。考える数学の内容は微分積分学、線形代数学など様々だが、今回は「ベクトル空間、その元、テンソル積、etc」を考えている図を想像する。(実際には x に関する連続性、可微分性 etc を満たすもののみを考えることが多い。)

一般に多様体 M に対して各点 $x \in M$ にベクトル空間 V_x が与えられているような状況を考える。これをベクトル空間の族とよび、 $\{V_x (x \in M)\}$ と書くことにする。 $(\{V_x (x \in M)\})$ のことを以下では V と略すことがある。) さらに、各 $x \in M$ にたいして、 V_x の元 v_x をそれぞれ与えたとき、 $\{v_x(x \in M)\}$ を V の場とよぶ。

族 $V = \{V_x(x \in M)\}$ と同じように $W = \{W_x(x \in M)\}$ が与えられたとしたとき、新しい族

$$\{V_x \otimes W_x \quad (x \in M)\}$$

を考えることができる。これが族 V と W のテンソル積である。

2.2 反変、共変ベクトル

M の各点 x に対して、接空間 $T_x M$ を考えると、接ベクトル空間の族 $T_x M (x \in M)$ を考えることができる。 $v_x \in T_x M(x \in M)$ を接ベクトル場 (“反変ベクトル場”) と呼ぶ。

M の各点 x に対して接空間 $T_x M$ の双対空間 $T_x^* M$ を考えることができる。これにより余接空間の族、余接ベクトル場を同様に定義できる。

$T_x M(x \in M)$ や $T_x^* M(x \in M)$ のいくつかのテンソル積

$$(T_x M \otimes T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M) \otimes (T_x^* M \otimes T_x^* M \otimes \cdots \otimes T_x^* M)$$

を考えると、それはまたベクトル空間の族となり、各 x に対して

$$v_x \in (T_x M \otimes T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M) \otimes (T_x^* M \otimes T_x^* M \otimes \cdots \otimes T_x^* M)$$

を考えたものが、「テンソル」である。