

sampleA

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 4 & c \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

A の特性多項式は

$$f_A(X) = \det(X1_3 - A) = (X - 3)(X - 4)^2$$

である。 $(X - 3)$ と $(X - 4)^2$ とで拡張されたユークリッドの互除法を行おう。

maxima に `gcdex(X-3, (X-4)^2);` を計算させてみる $([-x + 5, 1, 1])$ か、直接計算により

$$(X - 3) \cdot (-X + 5) + (X - 4)^2 = 1$$

を得る。

$$P = -(A - 31_3)(A - 51_5)$$

$$Q = 1_3 - P$$

と置けば、

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & b - a c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -a & a c - b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と計算でき、それぞれの列ベクトルが A の弱固有空間の生成元を与える。

参考に使った maxima ファイル。

```
A:matrix([3,a,b],[0,4,c],[0,0,4]);  
P:-(A-3*ident(3)).(A-5*ident(3));  
P.P;  
P-P.P;  
Q:ident(3)-P;
```

実行結果:

(%i2) A:matrix([3,a,b],[0,4,c],[0,0,4])

(%o2)

$$\begin{bmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 4 & c \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(%i3) P:-(A-3*ident(3)) . (A-5*ident(3))

(%o3)

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b - a & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i4) P . P

(%o4)

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b - a & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i5) P-P . P

(%o5)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i6) Q:ident(3)-P

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(%o6)

$$\begin{bmatrix} 1 & -a & a & c & -b \\ 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & & 0 & \end{bmatrix}$$