補足

次の補題の証明を追加しておこう。細部は各自埋めるといいかもしれない。

補題 0.1. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする。$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ が A の互いに相異なる固有値であるとし、A の λ_1-固有ベクトル $\mathbb{v}_1, \dots,$ A の λ_k-固有ベクトル $\mathbb{v}_k$ をとる。このとき $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_k$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立である。

証明. k に関する帰納法を用いる。$k = 1$ のときは固有ベクトルの定義によってすぐ確かめられる。

$\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_{k-1}$ は一次独立であるとする。もし $\mathbb{v}_1, \dots \mathbb{v}_k$ が一次独立でないとすると

$$S = \sum_j c_j \mathbb{v}_j = 0 \qquad (\exists c_j \in \mathbb{C} \text{ such that } (c_j)_{j=1}^k \text{ は } 0 \text{ ベクトルではない})$$

両辺に A を左から掛けて

$$AS = \sum_j c_j A \mathbb{v}_j = \sum_j c_j \lambda_j \mathbb{v}_j = 0$$

$$\lambda_k S - AS = \sum_j c_j (\lambda_k - \lambda_j) \mathbb{v}_j = 0$$

$(c_j(\lambda_k - \lambda_j))_{j=1}^{k-1}$ は仮定により 0 ベクトルではないが、これは $\{\mathbb{v}_j\}_{j=1}^{k-1}$ は一次独立であったことに矛盾する。

よって $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_k$ は一次独立であり、k に関する帰納法により補題が証明された。

□