

## 多変数の微分積分演習問題 No.1

**問題 1.1.**  $\mathbb{R}^2$  の部分集合で、開集合でも閉集合でもないものの例をあげよ。(もちろん理由も述べること) 一人1個を限度とするが、本年度履修生全体としては何個上げていただいても構わない。ただし、オリジナリティー、簡明さを考慮すること。(つまり似たようなものは一個にカウントされないのでご注意。)

**問題 1.2.**  $\mathbb{R}^2$  の開円板は開集合であることを示せ。

**問題 1.3.**  $\mathbb{R}^2$  の開円板は閉集合でないことを示せ。

**問題 1.4.**  $\mathbb{R}^2$  の閉円板は閉集合であることを示せ。

**問題 1.5.**  $\mathbb{R}^2$  の閉円板は開集合でないことを示せ。

**問題 1.6.** 开区間  $(a, b)$  は  $\mathbb{R}$  の部分集合としては開集合であるが、 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in (a, b) \text{ and } y = 0\}$  は  $\mathbb{R}^2$  の開集合ではないことを示せ。

**問題 1.7** (位相空間論を正しく履修のあとでよい。). 开区間  $(a, b)$  と  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in (a, b) \text{ and } y = 0\}$  は (通常有位相で) 同相であることを示しなさい。

**問題 1.8.** 任意の正の整数  $n$  に対して、 $\mathbb{R}^n$  の開球は開集合であることを示せ。

**問題 1.9.** 任意の正の整数  $n$  に対して、 $\mathbb{R}^n$  の開球は閉集合でないことを示せ。

**問題 1.10.** 任意の正の整数  $n$  に対して、 $\mathbb{R}^n$  の閉球は閉集合であることを示せ。

**問題 1.11.** 任意の正の整数  $n$  に対して、 $\mathbb{R}^n$  の閉球は開集合でないことを示せ。

**問題 1.12.** 任意の正の整数  $n$  に対して、 $\mathbb{R}^n$  の開集合の有限個の共通部分は開集合であることを示せ。

**問題 1.13.** 任意の正の整数  $n$  に対して、 $\mathbb{R}^n$  の閉集合の任意個 (無限個かもしれない) の共通部分は閉集合であることを示せ。

**問題 1.14.** 任意の正の整数  $n$  に対して、 $\mathbb{R}^n$  の閉集合の有限個の和集合は閉集合であることを示せ。

**問題 1.15.** 任意の正の整数  $n$  に対して、 $\mathbb{R}^n$  の開集合の任意個 (無限個かもしれない) の和集合は開集合であることを示せ。

**問題 1.16.**  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$  のグラフをかけ。

**問題 1.17.**  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y^2$  のグラフをかけ。

**問題 1.18.**  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y^3$  のグラフをかけ。

**問題 1.19.**  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^3$  のグラフをかけ。

**問題 1.20.**  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y)$  のグラフをかけ。

**問題 1.21.**  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^x \sin(y)$  のグラフをかけ。

**問題 1.22.**  $V, \langle \bullet \rangle$  を実計量ベクトル空間とし、任意の  $x, y \in V$  を取る。このとき:

1. 任意の  $\lambda \in \mathbb{R}$  に対して、

$$\lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0$$

であることを確認せよ。

2. (コーシー・シュワルツの不等式) 前小問と高校時代の二次式の知識を使って

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

であることを示せ。ただし  $v \in V$  に対して、 $\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle v, v \rangle}$  と書くことにする。

**問題 1.23** (三角不等式).  $V, \langle \bullet \rangle$  を実計量ベクトル空間とし、任意の  $x, y \in V$  を取る。このとき:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

が成り立つことをコーシー・シュワルツの不等式を用いて示せ。

**問題 1.24.** 1. 実ノルム空間の定義を(教科書、ネット等を調べて)書け。

2.  $V, \langle \bullet \rangle$  を実計量ベクトル空間とし、 $\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle v, v \rangle}$  と書くことにする。このとき  $V, \|\bullet\|$  は実ノルム空間であることを示せ。

ここから下は主に進んで勉強したい人向けの補充問題である。

**問題 1.25.** 複素ベクトル空間  $V$  のエルミート内積の定義と複素計量ベクトル空間の定義を調べてかけ。

**問題 1.26.** 複素計量ベクトル空間  $V$  のコーシー・シュワルツの不等式を証明せよ。

**問題 1.27.** 複素計量ベクトル空間  $V$  での三角不等式を証明せよ。

**問題 1.28.** 複素計量ベクトル空間  $(V, \langle \bullet \rangle)$  が与えられたとする。このとき  $(V, \Re(\langle \bullet \rangle))$  は実計量ベクトル空間である(ただしこの講義では一般に  $\Re(a)$  は複素数  $a$  の実部を表す記号である。)