

多変数の微分積分演習問題 No.2

以下(次回以降も)命題が単に書いてある場合には「それを示せ」の意味です。さらに、いくつかの非自明な点がある場合には、それらもすべて示してください。

問題 2.1. $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^2$ の各点で連続である。

問題 2.2. $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}$ の各点で連続である。

問題 2.3.

$$f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

は原点 $(0, 0)$ において、極限を持たない。

問題 2.4.

$$f_2(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

は原点 $(0, 0)$ において、極限を持たない。

問題 2.5. $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto 1/x$ ($x \neq 0$) は $f(0)$ をどのように定義しても 0 で連続な関数には延長されない。

問題 2.6. $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto y/x$ ($x \neq 0$) は $f(0, 0)$ をどのように定義しても $(0, 0)$ で連続な関数には延長されない。

問題 2.7. 任意の n 変数多項式関数 f について、 f は $\mathbb{R}^n$ の各点において連続である。

問題 2.8.

$$f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ で有界である。(sup と inf を求めよ。)

問題 2.9.

$$f_2(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ で有界である。(sup と inf を求めよ。)