

多変数の微分積分演習問題 No.7

定義 7.1. f を距離空間 (X, d) で定義された実数値関数とする。 f が $P \in X$ で広い意味で極大値を取る とは、ある $\epsilon > 0$ が存在して、

$$\forall Q \in X \quad (d(Q, P) < \epsilon \implies f(Q) \leq f(P))$$

を満たすときに言う。同様に「広い意味で極小値を取る」も定義される。

「広い意味で極大値を取る」もしくは「広い意味で極小値を取る」のいずれが満たされるとき、「広い意味で極値を取る」とよぶ。

問題 7.1. $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上の実数値関数 f が $P \in U$ で極値を取るならば、 $df|_P = 0$.

問題 7.2. 周の長さが 1 であるような三角形がその条件の下で面積最大になるならば、その三角形は正三角形である。

問題 7.3. $f = xy(x^2 + y^2 - 1)$ とおく。 $df|_P = 0$ を満たす点 P をすべて求めよ。

問題 7.4. $f = e^{-(x^2+y^2)}(5x^2 + y^2)$ とおく。 $df|_P = 0$ を満たす点 P をすべて求めよ。

問題 7.5. $xyz(5x^2 + 3y^2 - z^2)$ の点 (a, b, c) における二次近似を求めよ。

問題 7.6. $f = xyz(5x^2 + 3y^2 + z^2 - 1)$ とおく。 $df|_P = 0$ を満たす点 P をすべて求めよ。

問題 7.7. $e^{-(x^2+y^2+z^2)}(5x^2 + 3y^2 + z^2)$ の点 (a, b, c) における二次近似を求めよ。

問題 7.8. $f = e^{-(x^2+y^2+z^2)}(5x^2 + 3y^2 + z^2)$ とおく。 $df|_P = 0$ を満たす点 P をすべて求めよ。

問題 7.9. $f = xy(x^2 + y^2 - 1)$ とおく。 f の $(0, 0)$ における二次近似を求めよ。

問題 7.10. $f = xy(x^2 + y^2 - 1)$ とおく。 f の $(0, 1)$ における二次近似を求めよ。

問題 7.11. $f = xy(x^2 + y^2 - 1)$ とおく。 f の $(1/2, 1/2)$ における二次近似を求めよ。