

多変数の微分積分演習問題 No.8

定義 8.1. (E, d) が距離空間のとき、 $f : E \rightarrow E$ が縮小写像であるとは、

$$\forall x, y \in E \quad (d(f(x), f(y)) < \frac{1}{2}d(x, y))$$

が成り立つときに言う。(ほんとうは $\frac{1}{2}$ は 1 より小さい正の数なら何でも良いところだが、そう一般化しても今は利益が少ないのでこうしておく。)

問題 8.1. 任意の縮小写像 $f : E \rightarrow E$ は連続である。

問題 8.2. $f, g : E \rightarrow E$ がともに縮小写像 なら、 $g \circ f$ も 縮小写像である。

定義 8.2. X を位相空間とする。連続写像 $f : X \rightarrow X$ が与えられた時、 $x \in X$ が f の固定点であるとは、 $f(x) = x$ がなり立つときにいう。

定義 8.3. X, d が完備距離空間であるとは、任意の X 内の Cauchy 列が X 内に極限を持つときに言う。

定義 8.4. $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合は完備距離空間である。

定義 8.5. X が距離空間で、位相空間としてコンパクトならば X は完備である。

問題 8.3. X を完備距離空間 (任意の X 内の Cauchy 列が X 内に極限を持つ) とする。縮小写像 $f : X \rightarrow X$ は必ず固定点を持つ。

問題 8.4. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が C^1 -級関数で、 g がその逆写像、 $f'(P)$ が可逆 なら g は $f(P)$ の近傍で C^1 級

問題 8.5. $f : \mathbb{R} \ni t \mapsto t^3$ は C^1 級関数であるが、その逆関数は C^1 級ではない。

問題 8.6. $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ は局所的に $\mathbb{R}^n$ の開集合と微分同相である。(つまり n 次元多様体である。)

問題 8.7. $f(x)$ を x の実係数多項式で、重根を持たないものとする。

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 = f(x)\}$$

は C 上の各点で、その近傍が $\mathbb{R}$ の開集合と微分同相である。

問題 8.8.

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 = x^2(x - 1)\}$$

は C 上の点 $(0, 0)$ で、その近傍が $\mathbb{R}$ の開集合とは微分同相でない。