

多変数の微分積分 やってみよう問題 No.9

出席番号、名前： _____

問題 9.1 (縮小写像の原理). E を $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$) の閉集合とする。

$\Phi : E \rightarrow E$ が

$$\forall P, Q \in E \quad (\|\Phi(P) - \Phi(Q)\| < \frac{1}{2}\|P - Q\|)$$

を満たすとする。

このとき Φ は E の中に不動点 ($\Phi(S) = S$ をみたす点 $S \in E$) を唯一つ持つ。

1. Φ は連続写像である。

2. $P_0 \in E$ を任意に取る。 $P_n = \Phi^n(P_0)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。このとき、

- 点列 $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ は有界である。
- 点列 $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ はコーシー列である。
- 点列 $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ はある一点 $Q \in E$ に収束する。
- その Q は Φ の不動点である。

3. $P, Q \in E$ がともに Φ の不動点ならば、 $P = Q$. つまり Φ の不動点は唯一つである。

(※実際には、 $\mathbb{R}^n$ のところは一般の完備距離空間でできる。)

問題 9.0.1. 一行感想を述べてください。

答:

一行感想以外の答えは位置がよくわかるようにかくこと。