幾何学 II 授業内容

2005 年 7 月 15 日　下村克己

1　単体複体

定義 1.1. K が単体複体とは、ある頂点の集合 V の有限部分集合の族で、

$$\sigma \in K, \quad \tau \subset \sigma \quad \Longrightarrow \tau \in K$$

を満たすもので、K の元を K の単体と呼ぶ。さらに K の単体 $\sigma \in K$ の濃度が $n+1$ のとき、σ を K の n-単体と呼び、$|\sigma| = n$ と書く。

定義 1.2. 単体複体 K の単体 σ, τ が $\tau \subset \sigma$ のとき、τ は σ の面単体と呼び、さらに、$|\tau| = k$ のとき、σ の k-面単体と呼ぶ。

定義 1.3. 単体複体 K, L が K の n-単体 σ とその $n-1$-面単体 τ に対し $K = L \coprod \{\sigma, \tau\}$ と表せるとき、K は L につぶれるといい $K \searrow L$ または $L \swarrow K$ と書く。単体複体 K, L がホモトピー同値 $K \simeq L$ であるとは

1) 単体複体の列 $K = K_0, K_1, \ldots, K_m = L$ がある。

2) 各 i で $K_i \swarrow K_{i+1}$ または $K_i \searrow K_{i+1}$

を満たすときに言う。

定義 1.4. h がホモトピー不変量 (homotopy invariant) とは $X \simeq Y \Longrightarrow h(X) = h(Y)$ を満たす量である。

定理 1.5. 単体複体 K のオイラー数 $\chi(K)$ を $\chi(K) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i (K$ の i-単体の個数$)$ と定義すると、オイラー数はホモトピー不変量である。

2　基本群

定義 2.1. T が単体複体 K の樹木とは、$T \subset K$ となる単体複体で「$\forall \sigma \in K \Rightarrow |\sigma| \leq 1$」を満たし、$T \simeq *$ となるものである。ここに、$* = \{\emptyset, \{v\}\}$. K の樹木 T が極大であるとは、どんな 1-単体 τ に対しても、$T \cup \{\tau\} \not\simeq *$ となるものである。

定義 2.2. 単体複体 K の基本群 $\pi_1(K)$ は K の極大樹木 T に含まれない K の 1 単体を $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ とし、これらの 1 単体が 2 単体 r_j の面単体担っているとき、$\pi_1(K) = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n | r_1, \ldots, r_m \rangle$. と定義する。

定理 2.3. 基本群 $\pi_1(-)$ はホモトピー不変量である。

3　Diagram Chasing による証明

ここでは、$\mathcal{C}$ で「ベクトル空間と一次写像の圏」または「アーベル群と準同型の圏」を表す。即ち、$X \in \mathcal{C}$ は「X はベクトル空間 (またはアーベル群)」を意味し、$f \colon X \to Y \in \mathcal{C}$ は「$f \colon X \to Y$ は一次写像 (または準同型)」を表す。

定義 3.1. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \in \mathcal{C}$ が完全であるとは、「$gf = 0$」 かつ「$g(x) = 0 \Rightarrow \exists y \in X$ such that $f(y) = x$」を満たすときである。

定理 3.2. (FIVE LEMMA) 次の $\mathcal{C}$ の完全列の可換図式がある。

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{i} & E \\
\downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle e} \\
A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{i'} & E'
\end{array}$$

このとき、a, b, d, e が同型なら c もまた同型である。

定理 3.3. (SNAKE LEMMA) 次の $\mathcal{C}$ の完全列の可換図式がある。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

このとき次の完全列がある。

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\ a \xrightarrow{f} \mathrm{Ker}\ b \xrightarrow{g} \mathrm{Ker}\ c \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\ a \xrightarrow{f'} \mathrm{Coker}\ b \xrightarrow{g'} \mathrm{Coker}\ c \longrightarrow 0.$$

ここに δ は ${f'}^{-1} b g^{-1}$ により誘導されるものである。

4 鎖複体のホモロジー群

定義 4.1. $\mathcal{C}$ の列 $\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} C_0 \to 0$ が鎖複体とは各 n に対して、$d_n d_{n+1} = 0$ を満たすときである。

定義 4.2. $C_\bullet : \cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} C_0 \to 0,\ D_\bullet : \cdots \xrightarrow{d^D_{n+1}} D_n \xrightarrow{d^D_n} D_{n-1} \xrightarrow{d^D_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d^D_1} D_0 \to 0$ を鎖複体とする。このとき鎖複体の間の写像 $\varphi\colon C_\bullet \to D_\bullet$ とは「$\varphi = \{\varphi_n\colon C_n \to D_n\}$ かつ $\varphi_{n-1} d_n = d^D_n \varphi_n$」を満たすものである。

定義 4.3. 鎖複体 $C_\bullet$ の n 次元ホモロジー群 $H_n(C_\bullet)$ を

$$H_n(C_\bullet) = \mathrm{Ker}\ d_n / \mathrm{Im}\ d_{n+1}$$

と定義する。

定理 4.4. $0 \to C_\bullet \xrightarrow{\varphi} D_\bullet \xrightarrow{\psi} E_\bullet \to 0$ を鎖複体の完全列とする。このとき、次の完全列がある。

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(D_\bullet) \xrightarrow{\psi_*} H_n(E_\bullet) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C_\bullet) \xrightarrow{\varphi_*} \cdots.$$

定義 4.5. アーベル群 A の自由分解とは完全列 $\cdots \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to A$ で各 n に対して F_n が自由加群であるものである。このとき、アーベル群 B に対して、 $\cdots \to F_n \otimes B \to F_{n-1} \otimes B \to \cdots \to F_0 \otimes B \to 0$ は鎖複体 $F_\bullet \otimes B$ であり、 このホモロジー群を $\mathrm{Tor}_n(A,B)$ と書く。すなわち $\mathrm{Tor}_n(A,B) = H_n(F_\bullet \otimes B)$. 同様に、$\mathrm{Hom}(F_\bullet, B)$ は鎖複体になりこのホモロジー群を $\mathrm{Ext}^n(A,B)$ と書く。

定理 4.6. $\mathrm{Tor}_0(A,B) = A \otimes B,\ n > 1$ に対して、$\mathrm{Tor}_n(A,B) = 0$. $\mathrm{Ext}^0(A,B) = \mathrm{Hom}(A,B),\ n > 1$ に対して、$\mathrm{Ext}^n(A,B) = 0$.

5 単体複体のホモロジー群

定義 5.1. K を単体複体とする。このとき、$C_n(K)$ で K の n 単体を基底とするベクトル空間 (K の n 単体で生成される自由アーベル群) とする。このとき、微分 $d_n\colon C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ を

$$d_n(\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \{x_0, x_1, \ldots, \widehat{x_k}, \ldots x_n\}$$

で定義される一次写像 (準同型) と定義する。ただし、$\widehat{x}$ は x を除くの意味である。

定理 5.2. $d_n d_{n+1} = 0$

定義 5.3. 単体複体 K のホモロジー群を $H_n(K) = H_n(C_\bullet(K))$ と定義する。

定理 5.4. 各 n に対し、$H_n(-)$ はホモトピー不変量である。

定義 5.5. 単体複体 K のオイラー数 χ を

$$\chi(K) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \dim H_n(K) \quad (= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \mathrm{rank}\ H_n(K))$$

定理 5.6. 定理 1.5 のオイラー数と定義 5.5 のオイラー数は一致する。

6 一般ホモロジー論

定義 6.1. h_* が一般ホモロジー論とは、CW 複体の圏 $\mathcal{TOP}$ から次数付アーベル群の圏 $\mathcal{GA}$ への関手 $h_*\colon \mathcal{TOP} \to \mathcal{GA}$ で、次を満たすもの：

1) $f \simeq g\colon X \to Y$ ならば $h_*(f) = h_*(g)\colon h_*(X) \to h_*(Y)$

2) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ がコファイバー列なら、$h_*(X) \xrightarrow{h_*(f)} h_*(Y) \xrightarrow{h_*(g)} h_*(Z)$ は完全列

3) 自然同型 $\sigma_X\colon h_n(SX) \cong h_{n-1}(X)$ がある。

定理 6.2. 前節の単体複体のホモロジー群 H_* から誘導される簡約ホモロジー群 $\widetilde{H}_*$ は一般ホモロジー群である。

定理 6.3. Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列 $E^2_{s,t} = \widetilde{H}_s(X : h_t(S^0)) \Longrightarrow h_{s+t}(X)$ がある。言い換えると、CW 複体 X の一般ホモロジー群 $h_*(X)$ は普通のホモロジー群 $\widetilde{H}_*(X)$ と球面のホモロジー群 $h_*(S^0)$ が分かれば計算可能である。

結論: 安定ホモトピー論ではホモトピー群は一般ホモロジー論であるので、球面のホモトピー群の決定は本質的な問題である。