

長屋横丁の位相空間論 (第2話)

演題：相対位相。

品の良さそうなお隠居が火鉢にあたりながら、キセルを吸っている。静かだった表の方が急に騒がしくなると、一人の男が飛び込んでくる。

熊さん： ご隠居さん、ご隠居さん。そうたいいそうって何ですかね。

ご隠居： 藪から棒に何だい。そうたいいそうって相対位相のことかい。

熊さん： そうたい。部分集合に位相をいれるんですたい。

ご隠居： そんなことをいうからには、おまえは位相というものは知っているんだろうね。

熊さん： ええと確か3つ条件があったはず、、（くるっと、ご隠居のほうに背を向けるとなにやらごそごそはじめる。そのうち、ご隠居のほうに向き直り）（棒読みで）空でない集合 X の部分集合の族 $\mathcal{T}$ が X の上の位相であるとは、つぎの $[O_1], [O_2], [O_3]$ をみたすときである。



ご隠居： それじゃあ開集合というのはなんだい。

熊さん： （小声で）ちえっ、こっちのほう聞きに来たのになんで次から次へと質問されなきゃならないんだい。

ご隠居： なんと言ったか。

熊さん： いや、なんにも。さっき言った（ ）の中に入っているような X の部分集合のことですよ。しかし、あっしにはこの開集合ってやつが何者なのかピンと来ないんですけど。戸も窓もついていないのに何が開いているのやら。

ご隠居： それじゃあ、実数直線にはどんな位相が入っているかご存知か？

熊さん： どんな位相たって、あっしがご存知なのは、ごく普通のやつでさあ。実数直線には絶対値で定義された距離 $d(x, y) = |x - y|$ があるんだから、距離空間から位相空間を定義する方法は（また背を向けてごそごそ）つぎの通りです。（また棒読みで）



ご隠居：（めんどくさそうに）开区間は $\mathbf{R}$ の開集合だよな*。

熊さん： ご隠居さんがそう言うならそうなのでしょう。それになにしろ名前に開の字がくっついているんだから。そんなら閉区間は閉集合でしょう。

ご隠居： その通り。閉集合が何について閉じているのか説明しよう。閉集合は開集合の補集合として得られるんだから、開のほうは推して知るべしだ。

$\mathbf{R}$ の閉集合として閉区間 $[0, 1]$ を考えよう。自分が小さくなってこの $[0, 1]$ の上に立っていると考えなさい。

熊さん：（目を閉じて）へえ、考えました。

ご隠居： それでは、0 の方向へずうーと近寄って行ってごらん。どこへ行きついた。

熊さん： そりゃあ、0 ですよ。

ご隠居： 0 は閉区間 $[0, 1]$ に入っている。どんなにずうーといっても外へ出ないから閉じているんで閉だ。

熊さん： なるほど。逆に开区間 $(0, 1)$ のときはずうーと 0 の方へ行くと 0 に着いて突然に外に出る。数列でも使ってずうーとの所を書くとこんな感じかな。

閉というのは、極限について閉じていること。つまり、

収束する数列 $\{x_n\}$ ($x_n \in [0, 1], n = 1, 2, 3, \dots, x_i \neq x_j (i \neq j)$) に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\quad)[0, 1]$.

ご隠居： 冴えてるねえ。いいことをいうじゃないか。実は極限の点というのは集積点になるんだよ。*

B の集積点からなる集合を $D(B)$ で、 B の閉包を $\bar{B}$ で表すことにしよう。 B が閉集合のとき、 $B = \bar{B}$ である。一方、 $\bar{B} = B \cup D(B)$ であるから、 $D(B) \subset B$ となる。逆に、 $D(B) \subset B$ ならば、 B は閉集合もいえる。

だいぶ、話しが回り道してしまった。そろそろ本題の相対位相に入ろうか。

相対位相の定義は



だ。

熊さん：（狐につままれたような顔をしている。）

ご隠居： よしよし、それじゃあまた具体例を考えてみようか。 $(0, 1](\subset \mathbf{R})$ に対して、相対位相を考えよう。 $(\frac{1}{2}, 1]$ は $(0, 1]$ において開集合かい。

熊さん： いやだなあ。1 のほうが] で閉じているから、開集合じゃないんでしょう。

ご隠居： それが、 $(\frac{1}{2}, 1]$ は $(0, 1]$ において開集合なんだよ。さっきの定義に従って見てみようか。

$(\frac{1}{2}, 2)$ は开区間だから、() において開集合だ。 $(\frac{1}{2}, 1] = (\frac{1}{2}, 2) \cap (0, 1]$ だからいま G として () を A として () を取れば、 $(\frac{1}{2}, 1]$ は () において開集合になる。

熊さん： さっきの ”ずうと ” というのはとつじつまが合っていないような気がするんですが。

ご隠居： $(0, 1] - (\frac{1}{2}, 1] = ($) だから、 $(\frac{1}{2}, 1]$ が開集合かどうかみるためには、() が閉集合かどうかみればよい。一見すると、0 にどんどん近づいていくと 0 に到達してしまっ、0 は () の中に入らないから、閉じていないように思うけれども、今度は考えているのが $(0, 1]$ の中だけだから、0 は初めからこの世界にはないんだ。 $\mathbf{R}$ で考えたときには、0 は $\mathbf{R}$ の中に入ったのだけれども、 $(0, 1]$ の中にはない。ないものには到達しようがない。だから、0 の側が (でも矛盾していないんだ。

熊さん： うーん、分かったような、分からないような。もう一度自分で考えてみやす。

ご隠居： （ちょっと自慢げに）そうしてみるのが、よろしい。

熊さん： ご隠居は本当に物知りですねえ。実は他にもいろいろ知りたいことがあるんですよ。（お経のような口調で）基本近傍系、開基、連続写像、積位相、等化位相、連結、弧状連結、コンパクト、ハウスドルフ、、、、

今度はご隠居のほうがあわてて後ろを向いて何やらごそそと本らしきもののページをめくっている。やがて、熊さんほうに顔を向けて、

ご隠居：（てぬぐいで冷や汗をぬぐいながら）そ、そんなに一度にやると体によくない。今度、今度にしよう。

そこへ天秤棒を担いだ与太郎が入ってくる。

与太郎：とうなすやでござい。じゃなくて、きょう、あたいは、ほんのあきないをしてるの。商いは飽きないというくらいで。これ、かってよ。（与太郎、「集合と位相」を取り出す。）

（ご隠居と熊さん、目を白黒させている。）

（そのうち、与太郎はふたりともが後ろに隠している本が「集合と位相」だと気付き、本を買ってもらえそうにない事が分かって泣きそうになる。）

ご隠居：（あわてて）持ってもいいから、もう1冊買おうじゃないか。この本は掛け値なしにいい本だから。

与太郎：掛け値をしなくちゃ、にようぼう子がやしなえねえ。（と泣き出す。）

おあとがよろしうで。

空欄を埋めて、次の問題に答えよ。

問題1 $\mathbf{R}$ に上のように位相が入っているとする。开区間は $\mathbf{R}$ の開集合であることを示せ。

問題2 (1) 集積点の定義を書き、その例を挙げよ。

(2) 収束する数列 $\{x_n\}$ ($x_n \in [0, 1], n = 1, 2, 3, \dots, x_i \neq x_j (i \neq j)$) に対して、 $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ とおく。極限 x は $\mathbf{R}$ の部分集合 $[0, 1]$ の集積点になることを示せ。

問題3 B の集積点からなる集合を $D(B)$ で表す。 $D(B) \subset B$ ならば、 B は閉集合であることを示せ。

問題4 $(0, 1] (\subset \mathbf{R})$ に対して、相対位相を考える。次の $(0, 1]$ の部分集合は $(0, 1]$ において開集合か、閉集合か、開でも閉集合でもないか理由をつけて答えよ。

- (1) $(\frac{1}{3}, 1]$,
- (2) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$
- (3) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$
- (4) $(0, \frac{1}{3}]$