

長屋横丁の位相空間論 (第3話)

図を描きながら、次を読んでみよう。

演題：基本近傍系。

向こうから砂煙をあげながら桶のぶら下がった天秤棒を肩に担いで男が一人、威勢よく走ってくる。

太助：どけ、どけ、どいてくれ。ぼやぼやしてたら、せっかくのてい(鯛)が腐っちまわあ。(道の端をとぼとぼ歩く子どもが目に入って) おや、あれは甥っ子の定吉じゃあねえか。あいつ何しょぼくれていやがんでえ。(立ち止まって) おい、定坊、どうした。

定吉：あつ、太助おじちゃん。今日の寺子屋の宿題が難しくて。全く世の中、分からないことだらけなんだから、いやんなっちゃうよ。

太助：えらく深刻だなあ。よしきた。任せとけ。いつも言ってるだろう。分からないことがあったら、この太助おじちゃんに聞けって。

定吉：(おずおずと宿題のプリントを出しながら) 基本近傍系と開基っていうんだけど。

太助：(一目プリントを見るなり) そ、そういえば急用を思い出した。すぐに戻ってくるから待っててくんねえ。

太助は再び砂煙をあげながら走り去る。

.....
しばらくして砂煙をあげて太助が戻ってきた。

定吉：太助おじちゃん、一体急用ってなんだったの。

太助：(肩で大きく息をしながら) ご隠居の所じゃあなくて、ええと、ほんのやばようだ。男はそんなこと気にすんな。分かんないところはまずは何だ。はやく言え、忘れねえうちに。

定吉：えっ、忘れないうちに???。うーん、それじゃあねえ、点 x を含む開集合のことを x の近傍って言ったりするだろう。こんな風に2つの呼び方があったら、こんがらがちゃうよ。

太助：そうだ。確かにこんがらがる。でも、近傍という名前にはそれなりに意味があるんだ。 x の近傍というと字の表す通り x の近くの点の集まりということなんだ。距離空間 (X, d) の場合で考えてみよう。 X の点 x と y が近くにあるというのはどう表されるだろうか。

定吉：そりゃあ、距離 d を使って、例えばその間の距離が ε より近いなら、 $d(x, y) < \varepsilon$ だよな。

太助：これには別の表し方があるんだ。 $y \in U(x, \varepsilon)$ だよ。この考え方を一般化して、 x の近傍 U に y が含まれているとき、同じ U に入る位には近くにあると思うことにしようというのが、近傍を導入した動機なんだ。

定吉：それで近さを表すときには開集合のことを近傍と呼ぶんだね。でも距離で表すほうが楽なのになあ。

太助：ところが、世の中には距離空間にならないような位相空間もあるんだ。そんな空間で近さを表すには近傍を使うしかないわけだ。

定吉：そうなのか。それじゃあ、今度は基本近傍系って何なのかを教えて!! 基本近傍系 $\mathcal{N}^*(x)$ は近傍系 $\mathcal{N}(x)$ に含まれるんだよね。大は小を兼ねるんだから、近傍系だけ考えた方がめんどくさくないんじゃないの。

太助：(宿題のプリントを見て) じゃあ、丁度、いい問題があるから見てみよう。

距離 $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ がはいっている $\mathbf{R}^2$ には開集合が d を使って定義されるから位相空間になる。。このとき、 $\mathcal{N}^*(x) = \{U(x; \frac{1}{n}) | n = 1, 2, \dots\}$ とおくと、これは x の基本近傍系になるかどうかというんだけど。実際、点 x を含む X の任意の開集合 U (すなわち、 $U \in \mathcal{N}(x)$) に対して、 $\mathbf{R}^2$ における開集合の定義より、正の数 ε が存在して、 $U(x; \varepsilon) \subset U$ となる。いま U に入って欲しいのは $\mathcal{N}^*(x)$ の中の元 $U(x; \frac{1}{n})$ なんだから、 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ となるような n をとれば、 $U(x; \frac{1}{n}) \subset U(x; \varepsilon) \subset U$ となって証明の完了だ。

ところで、イメージ的には、 $\mathbf{R}^2$ における開集合は周りが点線になっているような図で書くことができる。ところが、開集合には実にいろいろな形があるんだ。(太助、絵を描き出す)

ほら、さんま型近傍では細長くてそこに含まれていても近いのか、遠いのかよく分からない。でもイクラ型近傍 $U(x; \frac{1}{n})$ だと、一目瞭然だ。近傍系の基準になるようなものを集めたのが基本近傍系というわけなんだ。

定吉：へえー、基本近傍系は近傍系の中の粒ぞろいのエリート集団ってわけなのかあ。

太助：エリートかあ。基本近傍系も分かるおいらはさしずめ魚屋界のエリートだよなあ。売ってる魚の生きの良さじゃ猫もびっくりだ。

太助が何気なく天秤棒の方を見ると、桶からサンマをくわえて逃げようとしている猫と目が合う。

太助：こらあ、待たねえかい。

太助は猫を追っかけて砂煙をあげつつ路地裏に消えた。 第4話へ続く

長屋横丁の位相空間論 (第4話)

図を描きながら次を読んで問題に答えよ。

演題：開基。

いくら待っても太助が戻ってこないで定吉は残りの開基の部分を自分でやることを決心したようだ。しゃがみこんで本を風呂敷包みから取り出した。

定吉：ええと、開基というのは、 X を位相 $\mathcal{F}$ を持つ位相空間とした時、 $\mathcal{F}$ の部分集合、すなわち X の開集合よりなる1つの集合族 $\mathcal{B}$ で、任意の開集合 $U \in \mathcal{F}$ とその任意の点 $x \in U$ に対して、 $x \in V \subset U$ なる $V \in \mathcal{B}$ が存在する様なものかあ。そうだったかな？ 確か、授業では $\mathcal{B} = \{V \mid V \in \mathcal{N}^*(x), x \in X\}$ とかって言っていたような。

少し離れたところで定吉よりも小さな子供たちが数人、道端で遊んでいる。子供たちはへんな唄を歌い出す。

♪～かいきっていても恐かない～。ぼけっとせずに寄っといで、全部の点のが寄っといで～♪

定吉：そうか。基本近傍系 $\mathcal{N}^*(x)$ を X の各点について全部集めてきたのが開基なのか!! ということは、残りの問題が分かりそうだ。

距離 $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ がはいっている $\mathbf{R}^2$ において、 $\mathcal{N}^*(x) = \{U(x; \frac{1}{n}) \mid n = 1, 2, \dots\}$ は基本近傍系だったから、 $\mathcal{B} = \{U(x; \frac{1}{n}) \mid x \in X, n = 1, 2, \dots\}$ は $\mathbf{R}^2$ の開基になるのかあ (問題1：このことを証明せよ、ヒント：第3話)。

でもまだ開基ってしっくり来ないんだよな。まてよ。近傍も基本近傍系も名前のつき方に意味があったよな。開基という名前もあやしいぞ。開の基(もと)ってことだから、手に持っていた本をばらばらと調べ出す。きっとこれだ。

(p.125, 問3) $\mathcal{B}$ が X の開基であるための必要十分条件は、
 X の任意の開集合が $\mathcal{B}$ の集合の和集合として表わされることである。

ベクトル空間の”基”底や群の生成元みたいに、すべての開集合は開基を使って和集合をとることで作れるんだ。

今度は子供たちはへんな唄を歌いながら、棒切れで地面に絵を描いて遊んでいる。

♪～かってにとった開集合～、まんまる近傍うめてゆく。うめてゆく。どんだん、どんだんうめてゆく。とうとう全部になっちゃった。♪ #～♪

定吉：でも、問3って本当かなあ。さっきの $\mathbf{R}^2$ の開基 B の時にはそうになっているのかなあ。よし、確かめてみよう。 $\mathbf{R}^2$ における任意の開集合を V としよう。任意の点 $x \in V$ に対して、太助おじちゃんに教えてもらったようにすると、自然数 n が存在して $U(x; \frac{1}{n}) \subset V$ となる。この $U(x; \frac{1}{n})$ をすべての $x \in V$ に対して集めると $\bigcup_{x \in V} U(x; \frac{1}{n})$ となるよなあ。これが V になってくれていればいいのに。よし、調べてみよう。まず、各点 $x \in V$ に対して、 $U(x; \frac{1}{n}) \subset V$ だから $\bigcup_{x \in V} U(x; \frac{1}{n}) \subset V$ となる。逆の包含関係は任意の $x \in V$ に対してその x は、ええと、どうするのかなあ、そうか！その x は $U(x; \frac{1}{n})$ に含まれるから逆の包含関係も言えて証明終わり。なにか記号の書き方が変な気がするけどまあいいや。（問題2：変なところを指摘して、直してあげて下さい）やったー、これで宿題が完成だあ。

そこへよろよろと太助が戻ってくる。頭にはクモの巣をつけ着物もボロボロ。置いてあった桶の中を見て呆然としている。定吉が宿題を解くのに夢中になっているあいだに太助の運んでいた魚は全て野良猫たちのおなかのなかに入ってしまったようだ。

太助：なんてこったい。もう魚屋なんかやめてやる。

太助、頭に巻いていたねじりハチマキを地面にたたきつけて、座り込む。その様子を見ていた定吉は太助の肩に手を置いて、

定吉：太助おじちゃん。今日僕はおじちゃんから大切なことを教えてもらったよ。だから、おじちゃんもしっかりしてよ。

太助：(顔をあげて) 一体、教えた大切なことってなんだい。

定吉：近傍（辛抱）が大切だってことだよ。

おあとがよろしいようで。