

長屋横丁の位相空間論 (第 1 話)

「落語に出てきそうな普通のとある裏長屋。ただひとつ違うのはこの長屋の面々は位相空間論通だったのです。」

演題：距離の同値性

口げんかする声が近づいてくる。その声の主の 2 人は争うようにわれ先に土間から部屋の中へと上がり込んでくる。

ご隠居： ころころお前達，ぞうりを脱がないかい。脱いだらそこへ座って，けんかの理由を話してみなさい。

それから 2 人はご隠居に事情を話し始めた。その話を要約するとこうだ。熊さんと八つつあんの 2 人は親方から 2 つの場所への届け物を頼まれた。人情としては近い場所の方へ行きたいわけで，近い場所はどちらの方かという話になった。そこでその場所まで近いか遠いかを計るのに熊さんは道なりに，八つつあんは直線的に計ることを提案した。そしてどちらの計り方がいいかというんでけんかになったというわけだ。

ご隠居： よしよし，話は分かった。ここへ来たのはこのわたしにどちらの計り方がいいか決着をつけて欲しいと言うんだらう。

2 人はうんうんとうなずく。

ご隠居： 2 人は距離の定義は知っているね。いま，遠いか近いかを計ろうというんだから，距離を考えているんだ。本当は地球は丸いんだけど，この町内を考えるだけなら，平面 $\mathbf{R}^2$ だと考えてもいいから，熊さんの計り方は

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|, ((x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2)$$

で八つつあんの計り方は

$$d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, ((x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2)$$

となる。ちなみにこの町の道は碁盤の目のように整然としているから，熊さんの距離の方はこうなるんだが。

熊さん： へえ，なるほど。それでどちらがいいかはどうみるんです。

ご隠居： 距離が近いか遠いかを同じ程度よく判断できるかというのには距離の同値というのがある。それはこうだ。

距離 d と d' が同値であるとは距離空間 (X, d) の開集合は距離空間 (X, d') の開集合になり，逆に (X, d') の開集合は (X, d) の開集合になる
ときをいうんだ。

熊さん：この定義に出てくる開集合というやつは一体何者です。開集合の定義っていうのは確かこうだった。

距離空間 (X, d) の部分集合 G が開集合であるとは任意の $x \in G$ に対して正数 ε が存在して、 $U(x, \varepsilon; d) \subset G$

となるときだった。

ご隠居：その通り。開集合というのは ε 近傍を使って定義できる。

ε 近傍というのは $U(x, \varepsilon; d) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ だから、ざっくり言えば ε 近傍というのは d の計り方で x との距離が ε より近い範囲での”ご近所” っていうことだ。

ε 近傍自身は開集合になる (*) し、開集合 G というのは ε 近傍の和集合の形で書ける (**) から、開集合というのは距離が ε より近い範囲でのご近所という ε 近傍を一般化して考え出したご近所という感じだ。どちらの距離で計っても、ご近所が同じになるんだから、近いか遠いかを同じ程度よく判断できると考えられるんだ。

話を戻すと実は2人の定義した距離は同値になるんだよ (***)。

それにしても、八つつあん、まっすぐというのは実際には計りようがないんじゃないのかい。

八つつあん：そんなこたあねえです。丘の上から見てみると同じぐらい離れているように見えるし実際おいらはそこをまっすぐ通ったことがあるから分かるんだ。

ご隠居：これこれまっすぐだぞ。猫でもあるまいし、垣根や塀どころか人様の家の中も通らなきゃまっすぐなんて行けないだろう。

八つつあん：そうだよ。その猫を追いかけてこの町内を横切ったことがあるんだ。おかずのさんまをどろぼう猫に盗られておいらは茶碗をかかえたままそいつを追っかけた。さすがに猫のやつはとっ捕まえられなかったが、いつのまにか茶碗の上には鯛のお頭が載っかてたよ。あら不思議。

ご隠居：あら不思議じゃないだろ。さてはまた猫のおあがりをいただいたな。とにかく、2つの距離は同値なんだから、計るのはどちらでもいい。でも本当にたどるんじゃない。素直に道を歩いて届け物に行ってください。

2人は土間の隅でしばらく話し合っていたが、やっとどちらがどちらに行くかが決まった様子である。

熊さん, 八つつあん：ご隠居さんお世話さまでした。これから行って参ります。

2人は表口から出ていく。ご隠居が見ていると、八つつあんの方は前の家の塀をよじ登ろうとしている。ご隠居、家から飛び出して

ご隠居：こらこら八つつあん待ちなさい。さっき、お前もわたしの話を聞いていたじゃあないか。それなのにどうしてまっすぐに行こうとするんだい。

八つつあん：ご隠居さんの距離の同値の説明はごもっともでやんしたが、てやんでい、こちとら江戸っ子でい。あっしは曲がったことがでい嫌いなのでえーい。それにあっしにはどうしても確かめなきゃならねえことがあるんでえーい。

八つつあんは止めようとするご隠居の手を振り払い塀を越えて姿を消した。ドンガラガッタン、ワンワンワン、ガブリ、痛てててて。フギャー、ニャオン、バリバリ、こらやめろ、ひっかくな。かき分けかき分けガサガサ、ドン、ガチャーン、こら、わしの大切な盆栽を、ポカリ。よっこらしよ、ザブンザブザブ、いい湯加減ですう、極楽極楽。ガラガラ、ちょっと、ごめんなさい、きゃあ、あんた誰、へえ今日はすき焼きですか。どれどれ、あじみを、ちょっと味がうすいよう、足しましょう、ドバドバ、ひえーい、入れすぎた。……………

どのくらいの年月がたっただろう。表から出ていった八つつあんがボロボロの姿で裏口から戻ってきた。

八つつあん：本当に地球は丸かった。

おあとがよろしいようで。

問題 1 (*) を証明せよ。

問題 2 (**) を証明せよ。

問題 3 (***) を証明せよ。

問題 4 教科書「集合と位相」の 107 ページの定理 3 はこの話のような場合にはどういうことを意味しているのだろうか。