第1章　極限から見た位相（暫定版）

定義 1.1. 位相

X:全体集合, $\mathcal{T}$: X の開集合族 (位相) とは次の [O1]〜[O3] を満たすときをいう. $U \in \mathcal{T}$ を X の開集合という.

O1 ϕ, X : 開集合

O2 U_1, U_2 : 開集合 $\Rightarrow U_1 \cap U_2$: 開集合

O3 $U_\lambda(\lambda \in \Lambda)$: 開集合 $\Rightarrow \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$: 開集合

定義 1.2. 距離空間

(X, d) において d: $X \times X \to \mathbb{R}$ が X の距離であるとは

M1 $d(x, y) \geq 0(\forall x, y \in X), \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2 $d(x, y) = d(y, x)$

M3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

定義 1.3. 距離空間における開集合

$U(\subset X)$: 開集合 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in U$ に対し, $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $U(x; \varepsilon) \subset U$

定義 1.4. 数列の極限

$\{a_n\}$: 数列　 $a_i \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$

定義 1.5. 一般化

(X, d) : 距離空間　 $\{x_n\}$: 点列, $x_i \in X$

$\lim_{n\to\infty} x_n = x \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$

$d(x_n, x) < \varepsilon$ は $x_n \in U(x; \varepsilon)$ と書き換えることができるから,

$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow x_n \in U(x; \varepsilon)$

命題 1.6. $\{x_n\}$ が x に収束する
$\overset{iff}{\Longleftrightarrow} \forall U$ s.t. $x \in U$：開集合 $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow x_n \in U$

pf)
$\Leftarrow$ は明らか.
$\because x \in U(x;\varepsilon)$ は開集合
$\Rightarrow$)　$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow x_n \in U(x;\varepsilon)$ であるので, $\forall U$ s.t. $x \in U$：開集合に対して $\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. $U(x;\varepsilon_0) \subset U$ (距離空間の開集合の定義より.) $\varepsilon_0 > 0$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N_0 \Rightarrow x_n \in U(x;\varepsilon_0)$. 今, $U(x;\varepsilon_0) \subset U$ だから, 示された.

定義 1.7. 閉集合
$F(\subset X)$ が開集合である $\overset{def}{\Longleftrightarrow} X - F$：開集合

閉集合の性質

F1 ϕ, X：閉集合

F2 U_1, U_2：閉集合 $\Rightarrow U_1 \cup U_2$：閉集合

F3 $U_\lambda(\lambda \in \Lambda)$：閉集合 $\Rightarrow \cap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$：閉集合

逆に (F1)〜(F3) を公理として閉集合を定義することもある.

命題 1.8. F：閉集合である.
$\overset{iff}{\Longleftrightarrow} \{x_n\}$, $x_i \in F$ $x = \lim_{n \to \infty} x_n$ が存在する (収束している) ならば $x \in F$.

定義 1.9. $A \subset X$ に対して
A の閉包 $\overline{A}$ は A を包む最小の閉集合

命題 1.10. $A \subset X$ に対して
$\overline{A} = \{A$ の点列の収束先の全体$\}$

pf)
$\overline{A} = A \cup D(A)$ $D(A)$：A の集積点の全体
x が A の集積点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0$ に対して $(U(x;\varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \phi$
$A \cup D(A) = \{A$ の点列の収束先全体$\}$ を示す.
$\subset$ を示す. $\forall x \in A \cup D(A)$

- $x \in A$ のとき, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n = x$ と定義する. このとき, x は $\{x_n\}$ の収束先.

- $x \in D(A)$ のとき,

  $x_1 \in (U(x;1) - \{x\}) \cap A (\neq \phi)$
  $x_2 \in (U(x;\frac{1}{2}) - \{x\}) \cap A (\neq \phi)$
  $\vdots$
  $x_n \in (U(x;\frac{1}{n}) - \{x\}) \cap A (\neq \phi)$
  この $\{x_n\}$ は x に収束する.

$\supset$ を示す. x が $\{x_n\}$ の収束先. $\forall \varepsilon,\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow x_n \in U(x;\varepsilon)$
$x \in A$ なら OK.
$x \notin A$ とする. (目標 $x \in D(A)$)
$\forall \varepsilon > 0$ に対して
$U(x;\varepsilon) - \{x\}) \cap A = U(x;\varepsilon) \cap A \neq \phi$
$((\because) x_n \in U(x;\varepsilon) \cap A$ であるので)
X : 距離空間とする.
このとき,最初にあたえた位相の定義とは別のやり方で位相を定義しよう.
点列を用いる.

定義 1.11. (点列を使った閉集合)
F : X の閉集合 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ F の点列の収束先は F に属する.

この定義は正しいか？
(F1)〜(F3) を満たすかどうか調べる.

- (F1) X については明らか. ϕ についても成り立つ. ((∵) 仮定が偽なので, この命題は真になる)

- (F2) F_1, F_2 : 閉 $\Rightarrow F_1 \cup F_2$: 閉
  $(\because)\ \{x_n\},\ x_n \in F_1 \cup F_2,\ x = \lim_{n\to\infty} x_n$
  $\exists i$ s.t. F_i は x_n を無限回含む. $\{x_k \mid x_k \in F_i\}$ は $\{x_n\}$ の部分列.
  $x = \lim_{k\to\infty} x_k$. $\{x_k \mid x_k \in F_i\}$ は F_i の点列より $x \in F_i$

- (F3) (略)

点列の性質

1. $\{x_n\}$ が収束するとき, その収束先は唯一つ.
2. $\{x_n\}$: 収束する点列. $\{x_{n_k}\}$ を $\{x_n\}$ の部分列. $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$

(1) の証明
(a) $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, (b) $x' = \lim_{n\to\infty} x_n$ と仮定する.
$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$ ((a) より) $(d(x_n, x') < \varepsilon$ ((b) より))
$d(x, x') \leq d(x_n, x) + d(x_n, x') < 2\varepsilon$. ε は任意なので矛盾.
(2) の証明
$n_k > k \geq N$ のような k を取ると $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ より成立. (詳細略)

注意 点列を使った閉集合から導入した位相と普通に定義された位相は等しくなる.

定義 1.12. 連続性
$(X, d_X), (Y, d_Y)$: 距離空間. $f\colon X \to Y$: 連続
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ s.t. $d_X(x', x'') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$
X, Y : 位相空間. $f\colon X \to Y$: 連続
$\forall G$: Y の開集合 $\Rightarrow f^{-1}(G)$: X の開集合

命題 1.13. X, Y : 位相空間 $f\colon X \to Y$: 写像

$$f\text{:連続} \Longleftrightarrow \forall \{x_n\} \subset X \text{ s.t. } \exists \lim_{n\to\infty} x_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

注意 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の場合, 前にやっているはず.

$$f\text{:連続} \Longleftrightarrow \forall \{a_n\} \text{ : 収束する数列} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$$

定義 1.14. 点列コンパクト
A が点列コンパクト
$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \{x_n\} \subset A$ に対して $\exists \{x_{n_k}\}$(部分列)$\subset \{x_n\}$ s.t. $\exists \lim_{n\to\infty} x_{n_k} \in A$

定義 1.15. コンパクト
A がコンパクト
$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, G_\lambda$: X の開集合, $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \supset A \Longrightarrow \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ s.t. $G_{\lambda_1} \cup \cdots \cup G_{\lambda_n} \supset A$

命題 1.16. X が距離空間ならば
コンパクト $\Longleftrightarrow$ 点列コンパクト

X : 位相空間, 点列 $\{x_n\} \subset X$

$$\forall U \text{ : 開集合}, x \in U, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Longrightarrow x_n \in U$$

より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = x$ と定義できる.

X の開集合は ϕ, X だけ. この位相を密着位相
X は 2 点以上. $\forall \{x_n\} \subset X$ は X のどの点にも収束する. 収束先がただ 1 つであるためにはハウスドルフ性がいる.($\forall x, y \in X, x \neq y \Longrightarrow x \in \exists U_x, y \in \exists U_y$: X の開集合 s.t. $U_x \cap U_y = \phi$)