無限を数える.

§0. 無限とは

無限を有限と同じ感覚で扱うと簡単に間違えてしまう. 無限を考察することの難しさを示す問題の一つとして, 古代ギリシア以来有名な次のパラドックスを考えてみよう. こんなことはありえないから, 間違っているというのではなく論理的に論破してください.

・ゼノンのパラドックス (アキレスは亀を追いつけない):
古代ギリシャの英雄アキレスと亀が競争をする. ハンデをつけて亀は少し前からスタートする. スタートしてアキレスが走ってトコトコ歩いている亀を追いかける. アキレスが"亀がスタートした地点"に達したときには, 亀は少し先の地点まで進んでいる. アキレスがこの地点に達したときには, 亀はもう少し先の地点まで進んでいる. 以下, 際限なくこれが続くので, 亀はアキレスよりいつも先をトコトコ歩いている. よって, アキレスは絶対, 亀を追いつけない.

§1 無限集合

以下, 集合に現れる無限を見ていこう.
まず, 次のような集合を見てみよう.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$B = \{\text{地球上にある砂粒}\}.$$

これらの集合に属する元の個数は有限である. A に属する元の個数は 5 個であり, B に属する元の個数は天文学的に大きな数字になるだろうが, 原理的には数えあげることができるので有限である. つまり, A, B は有限集合である.

一方,

$$\mathbf{N} : \text{自然数全体の集合},$$

$$\mathbf{R} : \text{実数全体の集合}.$$

は元の個数は無限であり, 無限集合である.

無限集合の元の個数を考える前に有限のときは, どのように個数を数えているのかを明確にしておこう.

個数を比べるという行為を考えることにしよう．ここに帽子がたくさんあり, 人間もたくさんいるという状況で帽子と人間の数が同じあることを見るには帽子を人間がかぶってみれば良い．帽子が足りないまたは余ることがなければ, 帽子と人間の数は同じある．

このことは 2 つの集合 $\{$ ここにある帽子 $\}$ と $\{$ ここにいる人間 $\}$ の間に全単射があるかどうかを調べているということである．

上に挙げた集合 A を見てみると A に属する元の個数 (5 個) と元として属している数字 5 が一致している．数えるという行為は数字の集合との間に全単射を与えることである．例えば, ある集合と集合 A との間に全単射が存在するとき, その集合の元の個数は 5 というわけである．

無限集合の場合も考えることにして, 集合 A, B の間に全単射が存在するとき, それらの集合の元の個数が同じであるとしよう．

数学では集合の元の個数が同じというのを **対等である**, 集合の元の個数のことを **濃度** という用語を用いる．

きちんと定義を与えておこう．

> A, B:集合とする．
> A が B と **対等である** とは全単射な写像 $f : A \to B$ が存在するときと定義し, $A \sim B$ と表す．$A \sim B$ は同値関係になり, その同値類のことを **濃度** と呼ぶ．集合 A の同値類を A の**濃度**といい, 記号 $|A|$ で表す．

$$|\phi| = 0, |\{1\}| = 1, |\{1, 2\}| = 2, \ldots, |\{1, 2, \ldots, n\}| = n$$

である．
自然数全体の集合 $\mathbf{N}$ と対等な集合を**可算集合**といい, $|\mathbf{N}|$ を**可算の濃度**という．
有限集合と可算集合とを**高々可算な集合**という．
実数全体の集合 $\mathbf{R}$ の濃度 $|\mathbf{R}|$ を**連続体の濃度**という.$\mathbf{R}$ は可算集合ではない (言い換えると, 非可算集合である).

注意:(1) $|\phi| = 0, |\{\phi\}| = 1$ の違いに注意せよ．

(2) 有限集合の場合には部分は全体より小さいが, 無限集合の場合にはこの常識は通用しない.例えば, ”自然数全体の集合 $\mathbf{N}$” とその部分集合である” 偶数全体の集合” を考えてみよう．

有限の場合の個数に対しては, 大小を比較することができるし, $+, \times$ といった計算ができた. 無限集合の場合にはそれらが次のように定義される. 有限集合の場合の自然な概念の拡張になっていることを確かめて欲しい.

A, B:集合とする.

濃度の大小

$|B|$ は $|A|$ と等しいかまたは $|B|$ は $|A|$ より大きい (記号で $|A| \leq |B|$ で表す) というのを単射な写像 $f : A \to B$ が存在するときと定義する.

濃度の和

濃度の和 $A \cap B = \phi$ のとき

$|A| + |B|$ を $|A| + |B| = |A \cup B|$ により定義する.

濃度の積

濃度の積 $|A| \cdot |B|$ を $|A| \cdot |B| = |A \times B|$ により定義する.

(ここで $A \times B$ は集合の直積を表すことに注意)

§2 ホテルヒルベルト

無限をテーマにした不思議やパラドックスがちりばめられている.

ホテルヒルベルトは, 可算無限個の客室があるホテルである. ある日, 主人公 Fiona Knight がこのホテルヒルベルトに泊まりに来たところからところから話は始まる. ホテルはあいにく満室だったが, フロント係は宿泊できると言い張る. 館内放送のマイクを手に取り, 「お泊りのお客様にご案内いたします. お泊りの客室番号にひとつ加えた番号の客室にお移り下さい.」こうして, 1 号室が空き, 彼女は無事に泊まることができた. (*)

....

翌日は, このホテルに可算無限の人数のお客を連れた団体ツアーがやって来た. その日も満室だったが, フロント係は館内放送のマイクを手に取り, 「お泊りのお客様にご案内いたします. お泊りの客室番号を 2 倍にした番号の客室にお移り下さい.」こうして, 奇数番目の部屋が空き, 団体ツアー客は宿泊することができた.

さらにストーリーは続いてゆく.............................

・満室なのに宿泊客を迎えられる.
・無限＋１＝無限 (*)
・無限＋無限＝無限 (**)
・無限×無限＝無限

・フロントは１番，なのにプッシュボタンに１が無い.
1=0.99999...........

・ポーターはジグザグに荷物を運ばないといけない.

・部屋のランプはトンプソン・ランプ
(不連続関数, 極限値もたない)

・ゼノンのパラドックス (飛んでいる矢は飛んでいない):
矢は放たれた地点 A から的 B に当たるまでにその中間地点 C に達しなければばならない. さらにこの地点に達するまでに AC の中間地点 D に達しなければばならない. 以下, 際限なくこれが続くので, 矢は的 B に当たるまでに無限のステップを必要とする. これは不可能なので矢は飛べない.

・ホテルのレストランのメニューから生まれるさらに大きい無限:
$X = \{$ ホテルのレストランのメニューにある料理, 飲み物 $\}$ とすると, そのベキ集合 $P(X)$ は $P(X) = \{$ それらの料理, 飲み物のいくつか (無限の場合もある) を組み合せてできるコース $\}$ であり, 濃度は $|X| \leq |P(X)|$ かつ $|X| \neq |P(X)|$ となる.
(教科書の P.25 定理 13, P.53 定理 13 を参照のこと)