0. 論理――数学語を学ぼう――（簡易版）

高校で学んだ数学と大学で学ぶ数学は大きく違います．高校の数学が計算をして解答を数値で求めることが多かったのに対して，大学の数学は”定義”を理解しそれを使って”定理”を証明してゆくということが中心となります．そのときに必要となる隙のない記述をするのに用いられるのが, 数学的な論理です．日常で使われる論理と数学的な論理には違いがあり，それが大学の数学を勉強していく上での妨げになることがあります．数学を記述する数学語である「数学的な論理」について学んでいきましょう．

定義

真 (True), または偽 (False) が客観的に定まる文章を <u>命題</u> という.

例

P_1 : 24 は 3 で割り切れる.
P_2 : 21993 は素数である.
P_3 : 99 は大きな数である.

P_3 は命題ではないが, それ以外は命題である.
P_1 は真 (True) の命題であり, P_2 は偽 (False) の命題である.

命題が幾つかあった時，それらを組合わせて新しい命題を作るのに，

「 $\cdots$ でない」,「かつ (and)」,「または (or)」,「ならば ($\Rightarrow$)」

が用いられます．すなわち，

P でない.
P かつ Q である.
P または Q である.
P ならば Q である ($P \Rightarrow Q$).

最初の 2 つについては日常における意味と同じですが，残りの 2 つについては注意が必要です.

・「P または Q」はどちらか一方ではなく少なくとも一方を表す.
P, Q の両方が同時に真のときも,「P または Q」は真.

「ならば ($\Rightarrow$)」の場合は少し分かりにくいので，まず次の論理パズルを解いてみてください.

４枚カード問題
一方の面にアルファベットが，もう一方の面に数字が書いてあるカードが４枚ある.「A」「K」「４」「７」と書いてある面が今おもてになっている.「書かれているアルファベットが母音ならば，その裏の数字は偶数である」という規則が成り立っているかどうかを確かめたい．めくるカードの枚数はなるべく少なくしたい．何枚のカードを，そして，どのカードをめくればよいか.

“ P ならば Q である ”という表現の日常の使用法での意味は“ P が正しければ Q も正しい ”であろう．P が正しくない時“ P ならば Q ”の真偽はどう考えればよいのでしょうか．通常数学では“ P ならば Q ”を“「P であって Q でない」ことはない ”というように考えて仮定が偽であれば命題はいつも正しいと考えます.

・$P \Rightarrow Q$: P ならば Q の真偽に要注意.
仮定が偽であれば,「P ならば Q」は真.

ここで，先取りしてテキスト 6-7 ページから集合について見てやります.

定義
集合とは，一言でいえば，”ある性質をもち，きまった範囲をなすものの集まり”である．また，集合を構成するものを**元** (または**要素**) といい,
”x が集合 U の元である”ことを $x \in U$ と表す.

例
自然数全体の集まり $\mathbf{N}$ は集合であり，1 は自然数であるから，$1 \in \mathbf{N}$.

定義
$P(x): x=0$,
$Q(x): x$ は実数である
の様に変数を含んだ文章を 命題関数 という．命題関数は真偽が確定していないから命題ではない．しかし, 変数に具体的な何かが代入されれると, 真偽が決まる命題が出来る．

例えば, $P(0)$ は真, $P(1)$ は偽である．

定義 (任意の $\forall$ と … が存在する $\exists$)
U を集合とし, P(x) を U 上で定義された命題関数とするとき
「任意の $x \in U$ に対して $P(x)$」は命題となる．

記号では
「$\forall x \in U$ に対して $P(x)$」
と表せる．

U を集合とし, $P(x)$ を U 上で定義された命題関数とするとき
「$P(x)$ をみたす $x \in U$ が存在する」は命題となる．

記号では
「$\exists x \in U$ s.t. $P(x)$」
と表せる．

否定の作り方 (典型的なタイプ)

・「P かつ Q」の否定は「(P でない) または (Q でない)」となる．

・「P または Q」の否定は「(P でない) かつ (Q でない)」となる．

・「P ならば Q」の否定は「P かつ (Q でない)」となる．

・「任意の $(\forall)$」が使われている命題の否定
U を集合とし, P(x) を U 上で定義された命題関数とする.
このとき,
「任意の $x \in U$ に対して $P(x)$」の否定は
「($P(x)$ でない) をみたす $x \in U$ が存在する.」
「$\exists x \in U$ s.t. ($P(x)$ でない)」
となる.

・「 $\cdots$ が存在する $(\exists)$」が使われている命題の否定
U を集合とし, $P(x)$ を U 上で定義された命題関数とする.
このとき
「$P(x)$ をみたす $x \in U$ が存在する.」の否定命題は
「任意の $x \in U$ に対して，$P(x)$ でない」
「$\forall x \in U$ に対して $P(x)$ でない」となる.

・「任意の $(\forall)$」が使われている命題 (ちょっと複雑) の否定

U を集合とし，$P(x), Q(x)$ を U 上で定義された命題関数とする．このとき,
「任意の $x \in U$ に対して”$P(x) \Longrightarrow Q(x)$」は
言い換えると「$P(x)$ をみたす任意の $x \in U$ に対して $Q(x)$」
である.

「$P(x)$ をみたす任意の $x \in U$ に対して $Q(x)$」の否定命題は
「$P(x)$ かつ ($Q(x)$ でない) をみたす $x \in U$ が存在する.」となる.

$\forall, \exists$ の記号を使って書いてみて下さい.