Property T 入門

九州大学大学院数理学研究院
林　倫弘（助手）

まず property T の定義からはじめる。

定義 0.1. 可算離散群 G が *property T* を持つことは、次を満たすような有限個の元 $g_1, g_1, \cdots, g_n \in G$ と正の数 K, ϵ が存在することと定義する：もし G のユニタリ表現 π と単位ベクトル ξ が $\sup_{i=1,\cdots,n} ||\pi(g_i)\xi - \xi|| < \epsilon$ を満たしたとすると、任意の $g \in G$ に対して

$$||\pi(g)\xi - \xi|| \le K \sup_{i=1,\cdots,n} ||\pi(g_i)\xi - \xi||$$

が成立する。

上の定義は正確には property T の定義のひとつのいいかえであるが、本講演ではこれを定義として採用することにする。property T についてより詳しく知りたい方は [6][7] などを参照してください。

例 0.2. $SL(n,\mathbb{Z})$、$\mathbb{Z}^n \rtimes SL(n,\mathbb{Z})$（共に n は３以上）、有限群は *property T* を持つ

以下 G を可算離散 property T 群であるとする。さらに ICC であることも仮定する。G の regular representation が生成する II_1 型因子環を $L(G)$ で表す。上の定義の主張していることは、もし ξ が $\pi(g_1), \cdots, \pi(g_n)$ でだいたい不変ならば、実は $\pi(G)$ の全ての元にたいして一様にだいたい不変になることである。このことから $L(G)$ 上の写像列が各点収束していると、実は一様収束しなければならないことなどがでる（注：写像がなんでもよいわけではない）。この強烈な性質によって $L(G)$ は様々な特殊な性質を持つ。それら（のごく一部）を解説するのが本講演の目的である。

定理 0.3 ([1]). *$Int(L(G))$ は clopen*

系 0.4 ([1]). *$Out(L(G))$ は高々可算集合*

定理 0.5 ([1]). *$L(G)$ の基本群は高々可算*

定理 0.6. *$L(G)$ 上の自己同型の列 $\{\alpha_n\}_n$ が自己同型 α にトレース２ノルムに関して各点収束しているとすると、実は一様に収束する（注：この定理はより一般に完全正値写像の列についても成立する）*

他にもいろいろあるが、時間が許せば触れたいと思う。

参考文献

[1] Connes, A. *A factor of type* II_1 *with countable fundamental group.* J. Operator Theory **4** (1980), no. 1, 151–153.

[2] Connes, A. and Jones, V. *Property T for von Neumann algebras*, Bull. London Math. Soc. **17** (1985), no. 1, 57–62.

[3] Kazhdan, D. *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Funct. Anal. and its Appl. **1** (1967), 63–65.

[4] Popa, S. *Correspondences*, INCREST preprint 1986,

[5] _____, *On a class of type* II_1 *factors with Betti numbers invariants*, preprint, 2001.

[6] Valette, A. *Old and new about Kazhdan's property (T).* Representations of Lie groups and quantum groups (Trento, 1993), 271–333, Pitman Res. Notes Math. Ser., 311, Longman Sci. Tech., Harlow, 1994.

[7] Zimmer, Z. *Ergodic theory and semisimple groups. Monographs in Mathematics*, 81. Birkhauser Verlag, Basel, 1984.