直交ウェーブレットとクンツ環の関係

東邦大学大学院理学研究科
加藤 雅彦 (修士課程 2 年)

$L^2([0,2\pi))$ において，関数 $\psi_L(t)=e^{-it}$ に対して $\psi_L(nt)$ を対応させるユニタリ作用素を U_n とすれば $\{U_n\psi_L\}_{n\in\mathbb{Z}}=\{e^{-int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は正規直交基底となる．また，$l^2(\mathbb{Z})$ において関数 $\psi_l(i)=\delta(i)$ に対して $\psi_l(i-k)$ を対応させるユニタリ作用素を T とすれば $\{T^k\psi_l\}_{k\in\mathbb{Z}}=\{\delta(i-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は正規直交基底となる．U_n と T はそれぞれスケール変換と平行移動に相当する．ウェーブレットはこの両者を組み合わせることで $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底をなすようにした関数族といえる．

$L^2(\mathbb{R})$ 上のユニタリ作用素 U,T を

$$
\begin{aligned}
(U\xi)(x) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\xi\left(\frac{x}{N}\right) \quad && \text{for } \xi\in L^2(\mathbb{R}),\ x\in\mathbb{R}\\
(T^k\xi)(x) &= \xi(x-k) && \text{for } k\in\mathbb{Z},\ \xi\in L^2(\mathbb{R}),\ x\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

と定義する．

定義 1. ノルム 1 の関数 $\varphi\in L^2(\mathbb{R})$ が father 関数であるとは，$V_0=\overline{\mathrm{span}}\{T^k\varphi|k\in\mathbb{Z}\}$ とするとき

(i) $\{T^k\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交系をなし，

(ii) $U\varphi\in V_0$,

(iii) $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}}U^nV_0=\{0\}$,

(iv) $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}U^nV_0}=L^2(\mathbb{R})$

を満たすときをいう．

V_0 の元 $\xi(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}b_n\varphi(x-n)$ に対して $L^2(\mathbb{T})$ の元 $m(e^{-it})=\sum_{n\in\mathbb{Z}}b_ne^{-int}$ を対応させる等距離写像を $\mathcal{F}_\varphi$ とする．$\xi\in U^{-1}V_0$ に対して $m_\xi=\mathcal{F}_\varphi(U\xi)$ とおき，ξ および φ のフーリエ変換をそれぞれ $\hat{\xi},\hat{\varphi}$ で表すことにすると，

$$\sqrt{N}\hat{\xi}(Nt)=m_\xi(e^{-it})\hat{\varphi}(t)\quad t\in\mathbb{R}$$

という関係が成り立つ．

定義 2. $N\geq 2$ に対して，等距離作用素 $s_0,\dots,s_{N-1}$ が

$$s_i^*s_j=\delta_{ij}I,\quad \sum_{i=0}^{N-1}s_is_i^*=I$$

を満たすとき，$C^*(s_0,\dots,s_{N-1})$ をクンツ環といい，$\mathcal{O}_N$ で表す．

次に述べることからクンツリレーションが導かれる．$\rho = e^{2\pi i/N}$ とする．

命題 3. $\xi, \eta \in U^{-1}V_0$ とする．すべての $k \in \mathbb{Z}$ に対して $\xi \perp T^k\eta$ となるための必要十分条件は

$$\sum_{k=0}^{N-1} \overline{m_\xi}(z\rho^k) m_\eta(z\rho^k) = 0 \quad \text{a.a. } z \in \mathbb{T}$$

となることである．また，$\{T^k\xi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が正規直交系をなすための必要十分条件は

$$\sum_{k=0}^{N-1} |m_\xi(z\rho^k)|^2 = N \quad \text{a.a. } z \in \mathbb{T}$$

となることである．

$m_0 = m_\varphi$ とする．$m_1, \ldots, m_{N-1} \in L^2(\mathbb{T})$ を関係式

$$\sum_{k=0}^{N-1} \overline{m_i}(z\rho^k) m_j(z\rho^k) = \delta_{ij} N \quad \text{for } z \in \mathbb{T},\ i, j = 0, \ldots, N-1$$

を満たすように選び，$\psi_1, \ldots, \psi_{N-1}$ を

$$\sqrt{N}\hat{\psi}_i(Nt) = m_i(e^{-it})\hat{\varphi}(t) \quad \text{for } t \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, N-1$$

によって定義すると，$\{T^k\psi_i\}_{k\in\mathbb{Z},\ i\in\{1,\ldots,N-1\}}$ は $U^{-1}V_0 \cap V_0^\perp$ の正規直交基底となり，さらに $\{U^nT^k\psi_i\}_{n,k\in\mathbb{Z},\ i\in\{1,\ldots,N-1\}}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底となる．

$L^2(\mathbb{T})$ 上の作用素 $S_0, \ldots, S_{N-1}$ を

$$(S_i\xi)(z) = m_i(z)\xi(z^N) \quad \text{for } \xi \in L^2(\mathbb{T}),\ z \in \mathbb{T},\ i = 0, \ldots, N-1$$

と定義すると，$m_0, \ldots, m_{N-1}$ が先ほどの関係式を満たすことと $S_0, \ldots, S_{N-1}$ が

$$S_i^* S_j = \delta_{ij} I, \quad \sum_{i=0}^{N-1} S_i S_i^* = I$$

を満たすことが同値となる．

参考文献

[1] Ola Bratteli, Palle E. T. Jorgensen, *Isometries, shifts, Cuntz algebras and multiresolution wavelet analysis of scale N*, Integral Equations Operator Theory, **28**, no 4, 382–443 (1997). arXiv:funct-an/9612003

[2] Ola Bratteli, Palle E. T. Jorgensen, *A connection between multiresolution wavelet theory of scale N and representations of the Cuntz algebra $\mathcal{O}_N$*, Operator algebras and quantum field theory (Rome, 1996) (Doplicher, S. (ed.) et al.), International Press. 151–163 (1997). arXiv:funct-an/9612006