The Banach-Tarski Paradox

京都大学理学研究科
木田良才 (修士 1 回)

今回の講演では Banach-Tarski の定理（逆理）と呼ばれている定理について話してみたいと思う. この定理は内容的に非常に興味深いものであり, 日常の物理的な常識からはずれているにもかかわらず, 論理的に選択公理から導かれるという点から, 選択公理を用いる数学に携わるのであれば, ぜひ知っておくべきだという考えから, この話題を取り上げてみたわけである.

まずは, 主定理を.

定理 1 (Banach-Tarski). A, B を $\mathbf{R}^3$ の内点をもつ有界集合とする. このとき, A, B は次のような共通点のない同数の有限個の集合の和として表される：

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_n,$$

$$B = B_1 \cup \cdots \cup B_n,$$

$$A_i \cong B_i, i = 1, 2, \cdots, n.$$

ここで $\cong$ は $\mathbf{R}^3$ の合同変換, すなわち平行移動と回転で生成される変換群の元で移り合うことを意味する.

この定理を認めると, 次のようなことが可能になる.

‘豆粒を適当に有限個に分解し, 組み合わせると地球ができる！’

ただし, この場合の分解は非常に想像を絶するものであることに注意されたい. (つまり, 体積の違う球を A, B としたとき, 定理 1 で分解してできた個々の集合の中で少なくとも 1 つは Lebesgue 非可測集合になっている.)

この定理の一つの応用として、次のようなものがある：

定理 2. $\mathbf{R}^3$ 上には, 全ての部分集合上で定義された, 合同変換不変かつ単位立方体の測度が 1 となる有限加法的測度は存在しない.

実は, $\mathbf{R}^n (n \geq 4)$ に対しても同様のことが成り立つが, $n = 1, 2$ のときは成り立たない, つまり存在が示されている (これも具体的につくったわけでなく, 選択公理を用いて非構成的に存在が示されている).

この違いは何なのか？

実はこれは, 合同変換群の amenability の違いによるのである. つまり, $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$ の合同変換群は amenable であるが, $\mathbf{R}^n (n \geq 3)$ の合同変換群は non-amenable なのである. ここで, 一般に群が amenable とは, その群の全ての部分集合上で定義された有限加法的測度で左不変なものが存在するときをいう.

Banach-Tarski の定理の証明では, 本質的に選択公理とこの $\mathbf{R}^3$ の合同変換群の non-amenability(というよりは, 合同変換群が階数２の自由群を部分群として含むこと）が用いられている. 講演では, これらがどのように用いられているかを説明しながら, 定理の証明の概略を述べていきたい.

参考文献については, 次の２冊を挙げておく.[1] には非常にわかりやすい定理の証明の概略と, この定理の数学における位置づけに対する著者の考えなどが述べられている.[2] には, 定理の完璧な証明やさらに発展的なことが書かれている.

参考文献

[1] 志賀浩二, 無限からの光芒 -ポーランド学派の数学者たち-, 日本評論社, 1988.

[2] S.Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Cambridge University Press, 1985.