量子マルコフ状態

東北大学情報科学研究科
大野 博道 (博士課程２年)

1 量子マルコフ状態

$\mathfrak{A}_n$ を $d \times d$ 複素行列 $M_d(\mathbb{C})$ $(= M_d)$ とし，$\mathfrak{A} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathfrak{A}_i = \bigotimes_{i=1}^{\infty} M_d$ とする．また，任意の $\Lambda \subset \mathbb{N}$ に対し，$\mathfrak{A}_\Lambda = \bigotimes_{i \in \Lambda} \mathfrak{A}_i$ とする．特に，$\mathfrak{A}_{[1,n]} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i$ とする．ここで，$\mathfrak{A}_{[1,n-1]}$ は $\mathfrak{A}_{[1,n-1]} \otimes I$ とみなすことにより，$\mathfrak{A}_{[1,n]}$ の部分 C^* 環であるとする．さらに，推移写像 (translation) γ を，任意の $X \in \mathfrak{A}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ に対し，$\gamma(X) = I \otimes X$ により定義する．

また，C^* 環 $\mathfrak{B}$ 上の線形写像 E が条件つき平均 (conditional expectation) であるとは，E がユニタル，べき等かつ正であるときをいう．さらに，任意の $B \in \mathfrak{B}$ と $A \in \mathrm{ran}(E)$ に対し，E(BA) = E(B)A が成り立つ．

定義 1.1. $\mathfrak{A}$ 上の状態 ϕ が (量子) マルコフ状態であるとは，条件つき平均の列 $E_n : \mathfrak{A}_{[1,n+1]} \to \mathfrak{A}_{[1,n]}$ が存在して，$E_n(\mathfrak{A}_{[1,n+1]}) \supset \mathfrak{A}_{[1,n-1]}$ を満たし，さらに，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $A_1, \ldots, A_n \in M_d$ に対し，

$$\phi(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) = \phi \circ E_1 \circ \cdots \circ E_{n-1}(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)$$

を満たすときをいう．さらに，

$$\phi(X) = \phi \circ \gamma(X)$$

を満たすとき，ϕ は推移不変マルコフ状態 (translation-invariant Markov state) という．

有限次元 C^* 環上の状態について，次の命題が成り立つ．

命題 1.2. ϕ を有限次元 C^* 環 $\mathfrak{B}$ 上の状態とするとき，$\mathfrak{B}$ の正作用用素 D_ϕ で $\mathrm{Tr}(D_\phi) = 1$ を満たし，さらに任意の $B \in \mathfrak{B}$ に対し，

$$\phi(B) = \mathrm{Tr}(D_\phi B)$$

を満たすものが唯一存在する．ただし，Tr は $\mathfrak{B}$ 上のトレースとする．ここで，この D_ϕ を ϕ に対応する密度作用素 (density matrix) という．

このマルコフ状態を調べていくことがこの研究の目的であるが，今回の発表では推移不変マルコフ状態の密度作用素についての結果を紹介する．マルコフ状態の密度作用素は単に状態の具体的な形というだけでなく，モジュラ自己同型群やエントロピーとも深く関連している．

マルコフ状態の密度作用素を決定する上で，以下の定理および命題が有用である．

定理 1.3. ϕ を条件つき平均の列 $\{E_n\}$ に対応する $\mathfrak{A}$ 上のマルコフ状態とするとき，ある条件つき平均 $E: M_d \otimes M_d \to M_d$ が存在して，

$$F_n = \mathrm{id}_{\mathfrak{A}_{[1,n-1]}} \otimes E$$

により，F_n $(n \in \mathbb{N})$ を定義するとき，ϕ は条件つき平均の列 $\{F_n\}$ に対応するマルコフ状態になる．

命題 1.4. $\mathfrak{B} = \bigoplus_{i=1}^k M_{r_i}$ を有限次元 C^* 環，$\mathfrak{C} = \bigoplus_{j=1}^l M_{s_j}$ を $\mathfrak{B}$ のユニタル部分 C^* 環とし，さらに，m_{ij} を M_{s_j} の M_{r_i} に対する重複度とする．E を $\mathfrak{B}$ から $\mathfrak{C}$ への全射な条件つき平均とするとき，$\mathfrak{B}$ から $\bigoplus_{i,j} M_{s_j} \otimes M_{m_{ij}}$ への自然な条件つき平均 F と，任意の i,j に対し，$M_{m_{ij}}$ 上の正の汎関数 ρ_{ij} が存在して，

$$E = (\bigoplus_{i,j} \mathrm{id}_{M_{s_j}} \otimes \rho_{ij}) \circ F$$

と書ける．

これらを組み合わせると，次の定理を得ることができる．

定理 1.5. $\mathfrak{B} = \mathrm{ran}(E) = \bigoplus_{i=1}^k M_{d_i}$ とし，m_i を M_{d_i} の M_d に対する重複度とすると，$S_i \in M_{d_i}$ と $T_{ij} \in M_{m_i} \otimes M_{d_j}$ が存在して，$\phi|\mathfrak{A}_{[1,n-1]} \otimes \mathfrak{B}$ の密度作用素 D が

$$D = \bigoplus_{i_1,\dots,i_n} S_{i_1} \otimes T_{i_1 i_2} \otimes \cdots \otimes T_{i_{n-1} i_n}$$

となる．

参考文献

[1] L. Accardi, A. Frigerio, *Markovian cocycles*, Proc. Roy. Irish Acad. **83**(1983), 251-263.

[2] L. Accardi, F. Fidaleo, *Non-homogeneous quantum Markov states and quantum Markov fields*, J. Functional Analysis, **200**(2003), 324-347.

[3] O. Bratteli, D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Stastical Mechanics*, Vol. I, II, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.