酔歩 or 乱歩 入門
～ポアソン境界理論について～

岡安　類（大阪教育大学）

単位開円盤 D の境界を ∂D と書く.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, \quad \partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

D 上での**ディリクレ問題** (Dirichlet problem) とは, ∂D 上の連続関数 $f(x, y)$ を与えて, 境界上で f に一致する $\overline{D} = D \cup \partial D$ 上の調和関数 $u(x, y)$ を見つける典型的な数理物理の問題である:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 & (x, y) \in D \\ u(x, y) = f(x, y) & (x, y) \in \partial D \end{cases}$$

最初の方の微分方程式は**ラプラス方程式** (Laplace equation) と呼ばれ, この方程式を満たす関数 $u(x, y)$ のことを**調和関数** (harmonic function) と呼ぶ. 後の方の方程式は境界条件である.

まず, ２次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ と複素平面 $\mathbb{C}$ を自然に同一視する:

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

ディリクレ問題はポアソン積分を使って, 次のように解けることが知られている:

$$u(z) = \int_{\partial D} \frac{1 - z\overline{z}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) |d\zeta| \tag{1}$$

ここで右辺の積分は $f \in L^\infty(\partial D)$ でも意味を持つことに注意すると, 有界調和関数全体からなる集合 $H^\infty(D) (\subseteq L^\infty(D))$ と $L^\infty(\partial D)$ はポアソン積分によってバナッハ空間として等距離同型になる:

$$f \in L^\infty(\partial D) \longmapsto u \in H^\infty(D)$$

逆写像は,

$$\lim_{r \to 1-0} u(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \quad \text{a.e. } e^{i\theta} \in \partial D$$

で与えられる.

次に群

$$G = SU(1, 1) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} = 1 \right\} \subseteq GL(2, \mathbb{C})$$

を考える. この群 G は複素平面 $\mathbb{C}$ に次のように作用しているとする:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix} z = \frac{\alpha z + \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

これにより群 G から (複素解析としての) 同型群 $\mathrm{Aut}(D)$ の上への準同型写像が与えられる. そこで任意の $z \in D$ に対して, $z = go$ となる $g \in G$ を取る. (但し, o は原点.) このとき (1) 式は次のように書きなおすことができる.

$$u(go) = u(z) = \int_{\partial D} \frac{1 - z\overline{z}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ge^{i\theta}) d\theta \tag{2}$$

更に,

$$K = \mathrm{Stab}(o) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{array} \right] \middle| \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 = 1 \right\}$$

とおくと, ∂D 上ルベーグ測度は唯一の K-不変な確率測度である．この確率測度を λ とおく．そこで $h(g) = u(go)$ とおけば, (2) 式は

$$h(g) = \int_{\partial D} f(gx) d\lambda(x) \tag{3}$$

と書き直せる．このとき, G 上の関数 h は次のように特徴付けられる ([1]):

$$h(g) = \int_G h(gg') d\mu(g') \tag{4}$$

但し, μ は G 上のハール測度に対して絶対連続かつ両側 K-不変確率測度である．(4) 式を満たす G 上の有界な関数全体の集合を $H^\infty(G,\mu)(\subseteq L^\infty(G))$ とおけば, 次のようなバナッハ空間としての等距離同型対応がついたことになる:

$$\begin{array}{ccccc} H^\infty(G,\mu) & \simeq & L^\infty(\partial D, \lambda) & \simeq & H^\infty(D) \\ h & \longleftrightarrow & f & \longleftrightarrow & u \end{array}$$

これが群 G 上の確率測度 μ に対して, (4) を満たす G 上の関数 h を μ-**調和** (μ-harmonic) と呼び, $(\partial D, \lambda)$ のことを**ポアソン境界** (Poisson boundary), λ を**調和測度** (harmonic measure) と呼ぶ由縁である．また調和測度 λ は

$$\int_{\partial D} f(x) d\lambda(x) = \int_G \int_{\partial D} f(gx) d\lambda(x) d\mu(g) \qquad \forall f \in C(\partial D)$$

を満たす．これを $\lambda = \mu * \lambda$ と書き, λ は μ-**不変** (μ-stationary) であると言う．

任意に局所コンパクト群 G 上の確率測度 μ が与えられたとき, μ-調和関数を (3) の形で表現することのできる, 即ち, (3) 式が等距離同型 $H^\infty(G,\mu) \simeq L^\infty(B,\lambda)$ を導くような (B,λ) の構成方法 ([2]) を紹介することが本講演の主目的である．

参考文献

[1] Furstenberg, Harry *A Poisson formula for semi-simple Lie groups.* Ann. of Math. (2) **77** (1963) 335–386.

[2] Furstenberg, Harry *Random walks and discrete subgroups of Lie groups.* (1971) Advances in Probability and Related Topics, Vol. 1 pp. 1–63 Dekker, New York