

コンパクト量子群 $SU_q(2)$ のユニタリ表現と双対量子群

東京大学大学院数理科学研究科 博士課程一年 戸松 玲治
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

1 序

「簡単なオブジェを変形して、より複雑なオブジェを作る」といった試みは数学において基本的な考えであろう。そうした試みは、作用素環の世界でも Powers factor 等、存外多く見つかるものである。さて、Drinfel'd と神保が発案した量子群はリー環の普遍包絡環を q 変形したものであった。リー環とリー群の関係を見据えれば対応する変形が存在して当然であろう。Woronowicz はコンパクトリー群 $SU(2)$ の q 変形を関数環の枠組みで行った。今回は Woronowicz のコンパクト量子群 $SU_q(2)$ の既約表現, Clebsh-Gordan 分解, そして双対量子群について考察する。

2 コンパクト量子群

$SU(2)$ と $SL(2, \mathbb{C})$ について復習しておこう。それぞれ特殊ユニタリ群, 複素特殊線型群と呼ばれ、次で定義される。

$$\begin{aligned} SU(2) &= \{g \in M_2(\mathbb{C}) \mid gg^* = g^*g = 1, \det(g) = 1\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid \alpha\delta - \gamma\beta = 1, \bar{\alpha}\alpha + \bar{\gamma}\gamma = 1, \beta = -\bar{\gamma}, \delta = \bar{\alpha} \right\} \\ &\subset SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid \alpha\delta - \gamma\beta = 1 \right\} \end{aligned}$$

さて q を $0 < q \leq 1$ なる実数として、量子座標環 $A(SL_q(2))$ を次で定義する。

$$A(SL_q(2)) = \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha\delta - q\gamma\beta = \delta\alpha - q^{-1}\gamma\beta = 1, \alpha\beta = q\beta\gamma, \alpha\gamma = q\gamma\alpha, \beta\gamma = \gamma\beta \rangle$$

これは \mathbb{C} 上の Hopf 代数である。coproduct Δ , counit ε , antipode κ は次のようになる。

$$\Delta: A(SL_q(2)) \rightarrow A(SL_q(2)) \otimes A(SL_q(2))$$

$$\begin{pmatrix} \Delta(\alpha) & \Delta(\beta) \\ \Delta(\gamma) & \Delta(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \gamma & \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \delta \\ \gamma \otimes \alpha + \delta \otimes \gamma & \gamma \otimes \beta + \delta \otimes \delta \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon: A(SL_q(2)) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(\alpha) & \varepsilon(\beta) \\ \varepsilon(\gamma) & \varepsilon(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\kappa: A(SL_q(2)) \rightarrow A(SL_q(2))$$

$$\begin{pmatrix} \kappa(\alpha) & \kappa(\beta) \\ \kappa(\gamma) & \kappa(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -q^{-1}\beta \\ -q\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

これらは次の関係式をみたす。 σ は flip を, m は掛け算を表わす。

$$\Delta^{(2)} := (\Delta \otimes \iota)\Delta = (\iota \otimes \Delta)\Delta, \quad \Delta\kappa = \sigma(\kappa \otimes \kappa)\Delta, \quad m(\kappa \otimes \iota)\Delta(x) = m(\iota \otimes \kappa)\Delta(x) = \varepsilon(x)$$

$A(SL_q(2))$ は次の involution によって、Hopf*-algebra になる。

$$\begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -q^{-1}\beta \\ -q\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Hopf*-algebra $(A(SL_q(2)), *)$ を $A(SU_q(2))$ と記し、量子 $SU_q(2)$ 群の量子座標環という。 $SU_q(2)$ の $*$ -表現全てにわたって、行き先の作用素ノルムの上限を $A(SU_q(2))$ の C^* ノルムと定め、このノルムで完備化した C^* 環を「 q 変形された $SU(2)$ 上の連続関数環」とみて、 $C(SU_q(2))$ と書く。先に定義した κ は $C(SU_q(2))$ 上有界ではない。

3 Haar 測度

$C(SU_q(2))$ 上には次のような state h が一意的に存在し, $C(SU_q(2))$ の Haar state と呼ぶ.

$$(\iota \otimes h)\Delta(a) = h(a)1, \quad (h \otimes \iota)\Delta(a) = h(a)1 \text{ for all } a \in C(SU_q(2))$$

一方, $A(SU_q(2)) = \text{span}\{\alpha^k \gamma^l \gamma^{*m} \mid k \in \mathbb{Z}, l, m \in \mathbb{N}\}$ であることは直ちに分かる. ここで $k < 0$ の時は $\alpha^k = \alpha^{*-k}$ とした. 実はこの生成元は $A(SU_q(2))$ の基底になっている. よって Haar state の値はこの基底の値で決まり, 次のようになる.

$$h(\alpha^k \gamma^l \gamma^{*m}) = 0 \text{ if } k \neq 0, \quad h(\gamma^l \gamma^{*m}) = \delta_{lm} \frac{1 - q^2}{1 - q^{2l+2}}$$

h は faithful であることも知られていて, そのモジュラー自己同型群 $\{\sigma_t^h\}$ や $\kappa = R\tau_{-\frac{1}{2}}$ と分解したときのユニタリ対合 R , スケール自己同型群 $\{\tau_t\}$ は Woronowicz character と呼ばれる $A(SU_q(2))$ の (非有界) 汎関数族 $\{f_z\}_{z \in \mathbb{C}}$ が特徴づける. (別紙参照?)

4 ユニタリ表現, 既約ユニタリ表現

位相群を調べる場合, ユニタリ表現を調べることは基本的かつ非常に大事である. $SU_q(2)$ にも (ユニタリ) 表現が定義される.

Definition 4.1. K を (有限次元でなくともよい) ヒルベルト空間とし, $v \in \mathcal{M}(K(H) \otimes C(SU_q(2)))$ を (ユニタリ) 可逆作用素とする.

1. $(\iota \otimes \Delta)(v) = v_{12}v_{13}$ をみたす時, v (または組 (v, H)) を $SU_q(2)$ の (ユニタリ) 表現という.
2. $(v, K), (w, L)$ を $SU_q(2)$ の表現とした時, その Hom space を次で定める.

$$\text{Hom}(v, w) = \{T \in B(K, L) \mid (T \otimes 1)v = w(T \otimes 1)\}$$

3. (v, K) を $SU_q(2)$ の (ユニタリ) 表現とする. $\text{End}(v) := \text{Hom}(v, v) = \mathbb{C}1_K$ がなりたつ時, v を既約 (ユニタリ) 表現という.

$SU(2)$ から $SU_q(2)$ に目を向けても表現論自体は「あまり」変わらない. (既約表現類, 完全可約性やテンソル積表現の分解の仕方が同じということ. それでも量子次元など有用な量が q を伴って現れる! q が登場してこそ, Kac 環とは一線を画した存在となっていて, III 型環との相性のよさを垣間見られる, と思われる.)

Theorem 4.2. (v, H) を $SU_q(2)$ のユニタリ表現とする. (H は有限次元とは限らない.)

1. (v, H) が既約ならば, $\dim(H) < \infty$.
2. (v, H) は既約表現の直和で表わされる.

参考文献

- [1] S. L. Woronowicz, Compact quantum groups, Symétries quantiques (Les Houches, 1995), 845–884, North-Holland, Amsterdam, 1998.
- [2] S. L. Woronowicz, Tannaka-Kreĭn duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups, Invent. Math. 93 (1988), no. 1, 35–76.
- [3] S. L. Woronowicz, Compact matrix pseudogroups, Comm. Math. Phys. 111 (1987), no. 4, 613–665.
- [4] S. L. Woronowicz, Twisted $SU(2)$ group. An example of a noncommutative differential calculus, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 23 (1987), no. 1, 117–181.