統計数学II　第10回

担当：三角　淳　2011年12月20日

講義概要

・$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ はマルコフ連鎖で、状態空間を I、推移行列を $\mathbf{P}=(p_{ij})_{i,j\in I}$ とする。$n=0,1,2,\cdots$ に対して、$\pi_j(n)=P(X_n=j)\,(j\in I)$, $\pi(n)=(\pi_j(n))_{j\in I}$ とおく。特に $\pi(0)$ を初期分布と呼ぶ。

・任意の $n\in\mathbb{N},\ i_0,i_1,\cdots,i_n\in I$ に対して次が成り立つ。

$$P(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)=\pi_{i_0}(0)p_{i_0i_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$$

・$n=0,1,2,\cdots,\ i,j\in I$ に対して、n ステップ推移確率を $p_{ij}^{(n)}=P(X_n=j\,|\,X_0=i)$ で定める。$\mathbf{P}^{(n)}=(p_{ij}^{(n)})_{i,j\in I}$ とおくと、$\mathbf{P}^{(n)}=\mathbf{P}^n$ が成り立つ。更に $\pi(n)=\pi(0)\mathbf{P}^n$ となる。

レポート問題（以下の [1],[2] の解答を、次回の授業の終わりに提出して下さい。）

[**1**] 初期分布が $\pi(0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$、推移行列が $\mathbf{P}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 4 & 0 & 2\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$ で与えられるようなマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。状態空間は $I=\{1,2,3\}$ とする。このとき $P(X_3=1)$, $P(X_3=2)$, $P(X_3=3)$ を求めよ。

[**2**] [1] の $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して次を求めよ。

(1) $P(X_3=2\,|\,X_1=3)$

(2) $P(X_8=3\,|\,X_5=1)$

(3) $P(X_6=1\,|\,X_0=2,X_1=3,X_2=2)$

補充問題

[**3**] 初期分布が $\pi(0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$、推移行列が $\mathbf{P}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ で与えられるようなマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。状態空間は $I=\{1,2\}$ とする。

(1) $\mathbf{P}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ を求めよ。

(2) $P(X_n=1)$, $P(X_n=2)$ $(n\in\mathbb{N})$ を求めよ。

[**4**] $\mathbf{P}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ に対して [3] と同様の問題を考えよ。