統計数学II　第14回

担当：三角　淳　2012年1月24日 (2)

講義概要

・離散時間マルコフ連鎖の極限推移確率に関する補足。
・連続時間マルコフ連鎖の定義：$\{X_t\}_{t\geq 0}$ を連続時間確率過程で、状態空間 I は高々可算集合とする。任意の $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-1} < s,\ t > 0,\ i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i, j \in I$ に対して

$$P(X_{s+t} = j \,|\, X_{s_0} = i_0, X_{s_1} = i_1, \cdots, X_{s_{n-1}} = i_{n-1}, X_s = i) = P(X_{s+t} = j \,|\, X_s = i)$$

をみたすとする。このとき $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を連続時間マルコフ連鎖と呼ぶ。また上のような性質をマルコフ性と呼ぶ。
・上式の右辺を $p_{ij}(t)$ とおき、推移確率と呼ぶ。
・ポアソン過程は連続時間マルコフ連鎖の特別な場合である。

補充問題

[**1**] 推移行列が $\mathbf{P} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる離散時間マルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3\}$ とする。

(1) このマルコフ連鎖がエルゴード的である事を示せ。
(2) このマルコフ連鎖の定常分布を求めよ。
(3) 各 $i, j \in I$ に対して $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = j \,|\, X_0 = i)$ を求めよ。
(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ を求めよ。(注：$\mathbf{P}^n$ を直接計算する必要はない。)

[**2**] 推移行列が $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる離散時間マルコフ連鎖を考える。

(1) このマルコフ連鎖がエルゴード的でない事を示せ。
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ が存在しない事を示せ。