

統計数学II 第6回

担当：三角 淳 2011年11月15日

講義概要

- ・パラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程 $\{N_t\}_{t \geq 0}$ に対して

$$S_n = \inf\{t \geq 0 \mid N_t = n\} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad S_0 = 0 \quad (*)$$

$$X_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

とおく。 S_n はポアソン過程の値がはじめて n となった時刻を表す。 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を到着時間列と呼ぶ。

- ・上の $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立同分布な確率変数列で、 X_1 はパラメーター λ の指数分布に従う。
- ・ $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ ($n \in \mathbb{N}$) は、密度関数が次で与えられるようなガンマ分布に従う。

$$p(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \quad (x \geq 0)$$

- ・ $\{N_t\}_{t \geq 0}$ と $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ の間には次のような関係がある。

$$N_t = \sup\{n = 0, 1, 2, \dots \mid S_n \leq t\} \quad (t \geq 0)$$

レポート問題 (以下の [1] の解答を、次回の授業の終わりに提出して下さい。)

[1] $\{N_t\}_{t \geq 0}$ をパラメーター 3 のポアソン過程とする。 S_n を (*) で与えられるものとするとき、 $P(S_2 > 2)$ を次の 2 通りの方法で求めよ。

- (1) $S_2 > 2$ と $N_2 < 2$ が同値である事を用いる。
- (2) S_2 の密度関数の具体形を用いる。

補充問題

[2] $\{N_t\}_{t \geq 0}$ をパラメーター $\frac{1}{2}$ のポアソン過程とする。 S_n を (*) で与えられるものとするとき、 S_5 の平均と分散を求めよ。

[3] $\{N_t\}_{t \geq 0}$ をパラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程とする。 S_n を (*) で与えられるものとするとき、 S_n の密度関数の具体形を用いずに次を示せ。

$$E[e^{tS_n}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \quad (t < \lambda)$$