

# 統計数学II 第11回

担当：三角 淳 2012年12月18日

## 講義概要

・  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  はマルコフ連鎖で、状態空間を  $I$  とする。  $p_{ij}^{(n)}$  は  $n$  ステップ推移確率を表す。

$$p_{ij}^{(n)} > 0$$

であるような  $0$  以上の整数  $n$  が存在するとき、状態  $i$  は状態  $j$  に到達可能であるといい  $i \rightarrow j$  とかく。 $i \rightarrow j$  かつ  $j \rightarrow i$  のとき、 $i$  と  $j$  は相互到達可能であるといい  $i \leftrightarrow j$  とかく。同値関係  $\leftrightarrow$  によって各状態を同値類に分ける事ができる。

・ 任意の  $i, j \in I$  が相互到達可能のとき、 $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  は既約であるという。

・  $i \in I$  に対して

$$\{n \in \mathbb{N} \mid p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

の最大公約数を  $i$  の周期と呼ぶ。(そのような  $n$  が存在しないときは  $0$  とする。)

・  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  が既約のとき、全ての状態の周期は等しい。その共通の値を  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  の周期と呼ぶ。

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] 推移行列が  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$  で与えられるマルコフ連鎖を考える。

(1) このマルコフ連鎖が既約である事を示せ。

(2) このマルコフ連鎖の周期を求めよ。

## 補充問題

[2] 推移行列が次で与えられるマルコフ連鎖に対して、各状態を相互到達可能性から定まる同値類に分けよ。なお (1),(2) では状態空間  $I = \{1, 2, 3\}$ 、(3) では  $I = \{1, 2, 3, 4\}$  とする。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[3] [2] のそれぞれのマルコフ連鎖に対して、各状態の周期を求めよ。