

# 統計数学II 第13回

担当：三角 淳 2016年1月19日

## 講義概要

・  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  はマルコフ連鎖で、状態空間を  $I$  とする。 $p_{ij}^{(n)}$  は  $n$  ステップ推移確率を表す。  
 $I$  が有限集合のとき、 $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  が既約かつ周期1ならば、エルゴード的であるという。  
 $I$  が無限集合のとき、 $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  が既約かつ周期1で、全ての状態が正再帰的ならば、エルゴード的であるという。

・  $\mathbf{P}$  を推移行列とする。 $\pi = (\pi_j)_{j \in I}$  で、 $\pi_j \geq 0$  ( $j \in I$ )、 $\sum_{j \in I} \pi_j = 1$  かつ  $\pi \mathbf{P} = \pi$  をみたすものを定常分布と呼ぶ。

・  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  がエルゴード的であるとする。このとき定常分布  $\pi$  が唯一存在して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad (i, j \in I)$$

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] 推移行列が  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  で与えられるマルコフ連鎖を考える。

- (1) このマルコフ連鎖がエルゴード的である事を示せ。
- (2) このマルコフ連鎖の定常分布を求めよ。

## 補充問題

[2] 推移行列が次で与えられるマルコフ連鎖がエルゴード的かどうか調べよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

[3] 推移行列が  $\mathbf{P} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  で与えられるマルコフ連鎖  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  を考える。状態空間は  $I = \{1, 2, 3\}$  とする。

- (1) このマルコフ連鎖がエルゴード的である事を示せ。
- (2) このマルコフ連鎖の定常分布を求めよ。
- (3) 各  $i, j \in I$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j | X_0 = i)$  を求めよ。
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$  を求めよ。