

統計数学IB 第13回

担当：三角 淳 2017年1月20日

講義概要 (教科書 p121-127 も参照)

・大数の弱法則：

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立同分布な確率変数列で、平均 $E(X_k) = m \in (-\infty, \infty)$, 分散 $V(X_k) = \sigma^2 \in [0, \infty)$ ($k = 1, 2, \dots$) を持つとする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

・大数の強法則：

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立同分布な確率変数列で、平均 $E(X_k) = m \in (-\infty, \infty)$, ($k = 1, 2, \dots$) を持つとする。このとき、

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = m \right) = 1.$$

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。

[1] $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列、 X を確率変数とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^2) = 0$ が成り立つならば、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$ となる事を示せ。

補充問題

[2] $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立同分布な確率変数列で、パラメーター2の指数分布に従うものとする。

このとき $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ ($n \in \mathbb{N}$) の平均と分散を求めよ。

[3] [2] において、任意の $\varepsilon > 0$ に対して次が成り立つ事を示せ。

$$P \left(\left| Y_n - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2 n}. \quad (n \in \mathbb{N})$$