統計数学II　第14回

担当：三角　淳　2016年7月19日

講義概要

・$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ はマルコフ連鎖で、状態空間を I とする。$p_{ij}^{(n)}$ は n ステップ推移確率を表す。
I が有限集合のとき、$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が既約かつ周期1ならば、エルゴード的であるという。
I が無限集合のとき、$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が既約かつ周期1で、全ての状態が正再帰的ならば、エルゴード的であるという。

・$\mathbf{P}$ を推移行列とする。$\pi = (\pi_j)_{j\in I}$ で、$\pi_j \geq 0$ $(j \in I)$, $\sum_{j\in I} \pi_j = 1$ かつ $\pi\mathbf{P} = \pi$ をみたすものを定常分布と呼ぶ。

・$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ がエルゴード的であるとする。このとき定常分布 π が唯一つ存在して、

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad (i, j \in I)$$

レポート問題　以下の [**1**] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[**1**] 推移行列が $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/7 & 3/7 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。

(1) このマルコフ連鎖がエルゴード的である事を示せ。

(2) このマルコフ連鎖の定常分布を求めよ。

補充問題

[**2**] 推移行列が次で与えられるマルコフ連鎖がエルゴード的かどうか調べよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$,　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

[**3**] 推移行列が $\mathbf{P} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3\}$ とする。

(1) このマルコフ連鎖がエルゴード的である事を示せ。

(2) このマルコフ連鎖の定常分布を求めよ。

(3) 各 $i, j \in I$ に対して $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = j \,|\, X_0 = i)$ を求めよ。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ を求めよ。