

理工系微分積分学 第15回

担当：三角 淳 2018年1月30日

講義概要 (教科書 p126-130 も参照)

・ ガンマ関数 : $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$.

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (s > 0), \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

・ ベータ関数 : $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (p, q > 0)$.

・ 基本関係式 : $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p, q > 0)$.

期末試験の予告問題 (数値は変える予定です)

[1] 極座標変換を用いて次の重積分を求めよ。

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

補充問題

[2] ベータ関数に対して次が成り立つことを示せ。

(1) $B(p, q) = B(q, p)$.

(2) $B(p, q+1) = \frac{q}{p} B(p+1, q)$.

(3) $B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta$.

[3] (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta \cos^3 \theta d\theta$ をベータ関数を用いて表せ。

(2) (1) の式をガンマ関数を用いて表し、さらにその値を求めよ。