統計数学IB　第11回

担当：三角　淳　2017年12月21日

講義概要（教科書 p83-90 も参照）

・相関係数 $\rho(X,Y)$ は $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$ をみたす。

・確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立であるとは、任意の $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ に対して $P(X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \le x_k)$ をみたすときにいう。

・無限個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots$ が独立であるとは、その中から取り出した任意の有限個が独立なときにいう。

・確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立ならば、$E(X_1 \cdots X_n) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$.

レポート問題（今回は4点満点）　以下の [**1**] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[**1**] n を2以上の整数とする。連続型確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立で、いずれも $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$ を密度関数に持つとする。

(1) $P(\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \le x)$ $(x \in \mathbb{R})$ を求めよ。

(2) $\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ の密度関数を求めよ。(3) $E(X_1 X_2 \cdots X_n)$ を求めよ。

補充問題

[**2**] X は離散型確率変数で、$P(X=k) = \frac{1}{4}$ $(k=1,2,3,4)$ とする。$Y = 1_{\{X \in \{1,2\}\}}$, $Z = 1_{\{X \in \{1,3\}\}}$, $W = 1_{\{X \in \{1,4\}\}}$ と定める。

(1) Y と Z、Z と W、W と Y はそれぞれ独立である事を示せ。

(2) Y, Z, W は独立でない事を示せ。

[**3**] n を2以上の整数とする。確率変数 $X_1, X_2, \cdots X_n$ は独立で、$E(X_i) = 0$, $E(X_i^2) = 1$ $(1 \le i \le n)$ をみたすとする。このとき次を求めよ。

$$E[(X_1 + X_1 X_2 + \cdots + X_1 X_2 \cdots X_n)^2].$$