

理工系微分積分学 第4回

担当：三角 淳 2018年10月23日

講義概要（教科書 p58-61 も参照）

・ $z = f(x, y)$, $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ に対して、 $z = f(\phi(t), \psi(t))$ の t に関する微分は、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

・ 連鎖律： $z = f(x, y)$, $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ に対して、 $z = f(\phi(u, v), \psi(u, v))$ の u, v に関する微分は、

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

・ $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ に対して、 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ をヤコビアンと呼ぶ。

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。（授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。）

[1] 合成関数の微分を用いて、 $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ。（ u, v の式で表せ。）

(1) $z = x^2 y^3$, $x = u + v$, $y = -u + v$.

(2) $z = \cos(x - y)$, $x = uv$, $y = u^2 + v^2$.

補充問題

[2] 合成関数の微分を用いて、 $\frac{dz}{dt}$ を求めよ。（ t の式で表せ。）

(1) $z = x^5 y - y^3$, $x = \sin t$, $y = \cos t$.

(2) $z = x^3 e^{-2y}$, $x = t^2 + 2t$, $y = t^3$.

[3] 次の変数変換のヤコビアンを求めよ。

(1) $x = 4u + 7v$, $y = -6u + 3v$.

(2) $x = u^2 - v^2$, $y = uv$.