

理工系微分積分学 第6回

担当：三角 淳 2018年11月6日

講義概要（教科書 p65-66 も参照）

$$\cdot \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) = a \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

・テイラーの定理：

$f(x, y)$ は開領域 D 上で定義された C^n 級の関数で、 $\{(a + ht, b + kt) : 0 \leq t \leq 1\} \subset D$ とする。このとき、ある $\theta \in (0, 1)$ が存在して次をみたす。

$$f(a + h, b + k) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a, b) + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta h, b + \theta k).$$

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。（授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。）

[1] $f(x, y) = e^{-2x} \sin y$ とする。

(1) $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y)$ を求めよ。

(2) $(a, b) = (0, 0)$, $n = 2$ のときにテイラーの定理を適用した式を書け。

補充問題

[2] $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ をラプラシアンと呼ぶ。また、 C^2 級の関数 $f(x, y)$ に対して、 $\Delta f = 0$ をみたすならば f を調和関数と呼ぶ。次の関数は調和関数か。理由を付けて答えよ。

(1) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy$, (2) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$.

[3] $z = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ のとき、次を示せ。ただし f は C^2 級とする。

$$(1) x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = r \cos 2\theta \frac{\partial z}{\partial r} - \sin 2\theta \frac{\partial z}{\partial \theta}.$$

$$(2) y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}.$$