

確率論 第3回

担当：三角 淳 2019年4月26日

講義概要 (教科書 p3-7 も参照)

- ・ 起こりうる結果が有限通りで、起こり方が同等であるような試行における確率。
- ・ 確率 (確率測度) がみたすべき性質：
 - (i) $0 \leq P(A) \leq 1$, (ii) $P(\Omega) = 1$,
 - (iii) 高々可算個の排反事象に対して、 $P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$.
- ・ σ -加法族 (σ -集合体) : 確率が定義されるよい集合の集まり。標本空間 Ω の部分集合族 \mathcal{F} が次をみたすときにいう。
 - (i) $\Omega \in \mathcal{F}$, (ii) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$, (iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.
- ・ 確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) の導入。

レポート問題 以下の [1] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。(授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。)

[1] (Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とする。事象 $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ が排反で、 $P(A_n) = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のとき、 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$ を示せ。

補充問題

[2] 標本空間 $\Omega = \{1, 2, 3\}$ 、事象の全体 $\mathcal{F} = 2^\Omega$ とする。次のように定義される P はそれぞれ (Ω, \mathcal{F}) 上の確率測度となるか。理由を付けて答えよ。

(1) $P(\emptyset) = 0, P(\{1\}) = \frac{1}{12}, P(\{2\}) = \frac{1}{12}, P(\{3\}) = \frac{1}{12}, P(\{1, 2\}) = \frac{1}{4}, P(\{1, 3\}) = \frac{1}{4}, P(\{2, 3\}) = \frac{1}{4}, P(\Omega) = 1$.

(2) $P(\emptyset) = 0, P(\{1\}) = 1, P(\{2\}) = 0, P(\{3\}) = 0, P(\{1, 2\}) = 1, P(\{1, 3\}) = 1, P(\{2, 3\}) = 0, P(\Omega) = 1$.

[3] 標本空間 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする。次の \mathcal{F} はそれぞれ Ω 上の σ -加法族となるか。理由を付けて答えよ。

(1) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \Omega\}$

(2) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \Omega\}$