確率過程論　第15回

担当：三角　淳　2019年8月1日

講義概要

・連続時間マルコフ連鎖と、推移確率の計算例。

・ポアソン過程は連続時間マルコフ連鎖の特別な場合である。

期末試験の予告問題（数値は変える予定です）

[1] $\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター 2 のポアソン過程とする。

(1) $P(1 \leq N_3 \leq 3)$ を求めよ。

(2) N_3 の平均と分散を求めよ。

(3) $P(N_1 = 2 \,|\, 1 \leq N_3 \leq 3)$ を求めよ。

補充問題

[2] 推移行列が $\mathbf{P} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ （第 9 回 [2] と同じ）、状態空間が $I = \{1, 2\}$ の離散時間マルコフ連鎖に対して、次の状態に移動するまでの待ち時間を独立同分布な確率変数列で、パラメーター $\lambda > 0$ の指数分布に従うものに置き換えた連続時間マルコフ連鎖 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を考える。各 $i, j \in I$ に対して推移確率 $p_{ij}(t) = P(X_{s+t} = j \,|\, X_s = i)$ $(s, t > 0)$ とおく。

(1) $p_{11}(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} p_{11}^{(n)}$ （$p_{11}^{(n)}$ は $\mathbf{P}^n$ の $(1,1)$ 成分）となることを示し、さらにそれを具体的に求めよ。

(2) $p_{12}(t)$, $p_{21}(t)$, $p_{22}(t)$ を求めよ。

[3] $\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程とする。このとき、任意の $0 < s_0 < s$, $t > 0$, $i_0, i, j = 0, 1, 2, \cdots$, $i_0 \leq i \leq j$ に対して次が成り立つことを確かめよ。

$$P(N_{s+t} = j \,|\, N_{s_0} = i_0, N_s = i) = P(N_{s+t} = j \,|\, N_s = i).$$