確率過程論　第６回

担当：三角　淳　2019 年 5 月 30 日

講義概要

・パラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ に対して

$$S_n = \inf\{t \geq 0 \,|\, N_t = n\} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad S_0 = 0,$$
$$X_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

とおく。S_n はポアソン過程の値がはじめて n となった時刻を表す。$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を到着時間列と呼ぶ。

・上の $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立同分布な確率変数列で、各 X_n はパラメーター λ の指数分布に従う。

・$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ は、密度関数が次で与えられるようなガンマ分布に従う。

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \quad (x \geq 0).$$

レポート問題　以下の [**1**] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。（授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。）

[**1**] $\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター 5 のポアソン過程とし、$S_n = \inf\{t \geq 0 \,|\, N_t = n\}$ とする。このとき、$P(S_2 > 3)$ を次の 2 通りの方法で求めよ。

(1) $S_2 > 3$ と $N_3 < 2$ が同値であることを用いる。

(2) S_2 の密度関数の具体形を用いる。

補充問題

[**2**] $\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程とし、$S_n = \inf\{t \geq 0 \,|\, N_t = n\}$ とする。

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、S_n の分布関数を $F(x)$ とおくとき次を示せ。

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} P(N_x = k) \quad (x > 0).$$

(2) (1) の $F(x)$ の微分を計算することにより、S_n がガンマ分布に従うことを確かめよ。

[**3**] $\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $\lambda > 0$ のポアソン過程とし、$S_n = \inf\{t \geq 0 \,|\, N_t = n\}$ とする。

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、平均 $E(S_n) = n/\lambda$、分散 $V(S_n) = n/\lambda^2$ となることを示せ。

(2) 次が成り立つことを示せ。

$$E(e^{tS_n}) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \quad (t < \lambda,\, n \in \mathbb{N}).$$