確率過程論　第８回

担当：三角　淳　2019 年 6 月 13 日

講義概要

・離散時間マルコフ連鎖の定義：

$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ は離散時間確率過程で、状態空間 I は高々可算集合とする。任意の $n \in \mathbb{N}$, $i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i, j \in I$ に対して

$$P(X_{n+1} = j \,|\, X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i)$$

をみたすとする。このとき $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を離散時間マルコフ連鎖と呼ぶ。また上のような性質をマルコフ性と呼ぶ。

・上式の右辺を p_{ij} とおく。p_{ij} を推移確率、$\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$ を推移確率行列（推移行列）と呼ぶ。

レポート問題　以下の [**1**] の解答を、次回の授業のはじめに提出して下さい。（授業に関する要望・質問等があれば、レポートの余白に記入して下さい。）

[**1**] 推移行列が $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -a & b \\ 4 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える。

(1) 定数 a, b の値を求めよ。

(2) このマルコフ連鎖の状態推移図を書け。ただし状態空間は $I = \{1, 2, 3\}$ とする。

補充問題

[**2**] 推移行列が $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。状態空間は $I = \{1, 2, 3\}$ とする。このとき次を求めよ。

(1) $P(X_3 = 3 \,|\, X_2 = 2)$,　(2) $P(X_3 = 3 \,|\, X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 2)$,

(3) $P(X_4 = 2 \,|\, X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 3)$.

[**3**] 平面上の格子点 $(\mathbb{Z}^2)$ の上を次のような規則で動く確率過程 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。

・$X_0 = (0, 0)$.

・時刻 1 ごとに、上下左右の隣接点のいずれかに等確率で移動する。

・但し、同じ点は 2 回以上通らない。

・移動できなくなったらそれ以降は停止する。

(1) $P(X_3 = (0, 1) \,|\, X_0 = (0, 0), X_1 = (1, 0), X_2 = (1, 1))$ を求めよ。

(2) $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ はマルコフ性をもたないことを示せ。