# ジュリア集合のハウスドルフ次元について

諸澤 俊介

高知大学 理学部

**Abstract**

有理関数と超越整関数のジュリア集合のハウスドルフ次元に関するいくつかの結果を述べる。有理関数の場合には双曲型有理関数についてそのジュリア集合の２次元ルベーグ測度が 0 となること、そしてさらに、そのハウスドルフ次元が真に 2 より小さいことを示す。また超越整関数の場合には指数関数族と正弦関数族について考える。ジュリア集合は複素平面全体と一致しなければ内点を持たないが、正弦関数族の場合にはファトウ集合が空でないときにもそのジュリア集合の２次元ルベーグ測度が正となることを示す。さらに指数関数族のときにはファトウ集合が空でないときにもそのジュリア集合のハウスドルフ次元が 2 となることを示す。しかし吸引周期系を持つ指数関数のジュリア集合の２次元ルベーグ測度は 0 となる。

## 1　複素力学系

まず、この解説で必要な複素力学系の基本的な性質を列挙する。証明は [1] または [9] を参照。

$f$ を有理関数または超越整関数とする。$f^n$ で $f$ の $n$ 回の合成を表わす。$f$ が有理関数のときは $X$ は $\hat{\mathbf{C}}$ とし、$f$ が超越整関数のときは $X$ を $\mathbf{C}$ とする。このとき

$$\begin{aligned} F(f) &= \{z \in X \mid z \text{ のある近傍で } \{f^n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ が正規族}\} \\ J(f) &= X \setminus F(f) \end{aligned}$$

と定義し、$F(f)$ を $f$ のファトウ集合と呼び、$J(f)$ を $f$ のジュリア集合と呼ぶ。定義より $F(f)$ は開集合であり、$J(f)$ は閉集合である。

以下、有理関数の次数は 2 以上とする。

**定理 1** $J(f)$ は少なくとも３点を含む最小の完全不変閉集合である。ここで完全不変であるとは

$$f^{-1}(J(f)) = J(f) \qquad f(J(f)) \subset J(f)$$

を満たすことをいう。

**定理 2** $J(f) \neq X$ であるならば $J(f)$ は内点を持たない。

**定理 3** $f$ に対して高々2点集合 $E$ で次を満たすものが存在する。$X \setminus E$ に含まれる任意のコンパクト集合 $K$ と $J(f)$ と交わる任意の開集合 $A$ に対して、ある自然数 $n$ で $f^n(A) \supset K$ となるものが存在する。

**定理 4** $E$ を定理 *3* のものとする。$X \setminus E$ の任意の点 $z$ に対して

$$J(f) \subset \overline{O^-(z)}$$

が成立する。ここで

$$O^-(z) = \{w \mid f^n(w) = z \ for \ \exists \ n\}$$

とし、これを $z$ の後方軌道と呼ぶ。

**定理 5** 任意の自然数 $n$ に対して

$$F(f^n) = F(f) \qquad J(f^n) = J(f)$$

が成立する。

$f$ の特異値とは $f$ の臨界値または漸近値をいい、特異値の集合を $S(f)$ で表わす。特異値は複素力学系の研究において重要な役割を果たす。$f$ の次数を $d$ とすれば $S(f)$ は高々 $2d-2$ 個の集合である。

$D$ を $F(f)$ の成分とする。$D$ が $f(D) \subset D$ を満たすときに $D$ を前方不変成分と呼ぶ。また $f(\zeta) = \zeta$ を満たす点 $\zeta$ を $f$ の不動点と呼ぶ。

**定理 6** 前方不変成分 $D$ は次の5通りのいずれかである。

(1) $D$ はただ一つの不動点 $\zeta$ を持ち、任意の $z \in D$ に対して $\{f^n(z)\}$ は $\zeta$ に収束する。このとき $D$ を吸引成分と呼び、$\zeta$ を吸引不動点と呼ぶ。さらに $D$ は少なくとも一つ $S(f)$ の点を含む。

(2) $\partial D$ は不動点 $\zeta$ を持ち、任意の $z \in D$ に対して $\{f^n(z)\}$ は $\zeta$ に収束する。このとき $D$ を放物的成分と呼び、$\zeta$ を有理的中立不動点と呼ぶ。さらに $D$ は少なくとも一つ $S(f)$ の点を含む。

(3) $D$ は単連結であり、ただひとつの不動点を持ち、$f$ の $D$ への作用は単位円板上の無限位数の回転と等角同値である。このとき $D$ をジーゲル円板と呼ぶ。さらに$\partial D$ は $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} f^n(S(f))}$ に含まれる。

(4) $D$ は2重連結領域であり、$f$ の $D$ への作用は適当な2重円環上の無限位数の回転と等角同値である。このとき $D$ をエルマン環と呼ぶ。さらに$\partial D$ は $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} f^n(S(f))}$ に含まれる。

(5) $\partial D$ 上に $f$ が定義されない点 $\zeta$ が存在し、任意の $z \in D$ に対して $\{f^n(z)\}$ は $\zeta$ に収束する。このとき $D$ をベーカー領域と呼ぶ。

注意　定義より有理関数の力学系にはベーカー領域は現われない。また、最大値の原理により超越整関数の力学系にはエルマン環は現われない。

$F(f)$ の成分 $D$ で $f^n(D) \subset D$ となるものを $f$ の周期成分と呼び、特に $f^p(D) \subset D$ かつ $f^q(D) \cap D = \emptyset$ $(0 < q < p-1)$ となるとき $D$ を周期 $p$ の周期成分と呼ぶ。また $z \in X$ で $f^n(z) = z$ となる点を $f$ の周期点と呼び、特に $f^p(z) = z$ かつ $f^q(z) \neq z$ $(0 < q < p-1)$ となるとき $z$ を周期 $p$ の周期点と呼ぶ。定理 5 により周期成分についても定理 6 と同様に定義できる。さらに周期成分に関連した周期点についても同様に定義する。

$F(f)$ の成分 $D$ で、任意の自然数 $m, n$ $(m \neq n)$ に対して

$$f^m(D) \cap f^n(D) = \emptyset$$

となるものを $f$ の遊走領域と呼ぶ。サリヴァン（[8]）によって示された次の定理により複素力学系が注目を集めるようになった。

**定理 7** 有理関数の力学系には遊走領域は現われない。

## 2　有理関数

$z \in \mathbf{C}$ と $r > 0$ に対して $D(z,\ r)$ で $z$ を中心とし半径 $r$ の開円板を表わす。また、集合 $A$ に対して $\dim(A)$ で $A$ のハウスドルフ次元を表わす。この解説の中ではハウスドルフ次元の評価には次のフロストマンの補題がおもに使われる。

**補題 8** $E \subset \mathbf{C}$ とし、$\mu$ を $E$ 上の確率測度とする。もし、ある正定数 $c, t, r_0$ で、すべての $z \in E$ とすべての $r$, $0 < r < r_0$ に対して

$$\mu(D(z,\ r)) \leq cr^t$$

となるものが存在するのであれば $\dim(E) \geq t$ である。

上の補題を用いると次の評価が得られる。

**定理 9** $f$ は有理関数でその次数を $d \geq 2$ とし、$\infty \in F(f)$ とする。

$$K = \max\{|f'(z)| \mid z \in J(f)\}\ (> 1)$$

とおく。このとき

$$\dim J(f) \geq \frac{\log d}{\log K}$$

となる。特に有理関数のジュリア集合のハウスドルフ次元は正となる。

有理関数の各臨界点が吸引周期点に吸収されるときにその有理関数を双曲型であるという。双曲型となる必要十分条件には次のものがある。

**定理 10** 有理関数 $f$ が双曲型となる必要十分条件は $J(f)$ の近傍 $W$ とその上で定義されたリーマン計量 $\omega(z)|dz|$ と定数 $\lambda > 1$ と $c > 0$ で任意の $z \in J(f)$ について

$$\frac{\omega(f(z))|f'(z)|}{\omega(z)} \geq c\lambda^n$$

となるものが存在することである。

双曲型有理関数の存在については次の重要な予想がある。

**予想**　双曲型有理関数の集合は開かつ稠密である。

**注意**　$f$ が双曲型であるならば $F(f) \neq \emptyset$ である。したがって $J(f)$ は内点を持たない。

集合 $A \subset \mathbf{C}$ に対して meas$(A)$ で $A$ の２次元ルベーグ測度を表わす。また、集合 $A, B$ meas$(B) > 0$ に対して

$$\text{density}(A,\ B) = \frac{\text{meas}(A \cap B)}{\text{meas}(B)}$$

と定義する。

**定理 11** $f$ を双曲型有理関数とする。このとき

$$\text{meas}(J(f)) = 0$$

**証明**　meas$(J(f)) > 0$ とし、$z \in J(f)$ を密度点とする。すなわち $r_i \to 0$ に対して

$$\text{density}(J(f),\ D(z,\ r_i)) \to 1 \qquad (i \to \infty)$$

となる。必要があれば適当に部分列を取り直すことにより、定理 3 を用いて

$$f^{n(i)}(D(z,\ r_i)) = D_i \to D$$

meas$(D) > 0$ としてよい。したがって

$$\text{density}(J(f),\ D_i) \to 1 = \text{density}(J(z),\ D)$$

となり、$J(f)$ は閉集合であるから内点を持つことになり、すなわち、定理 2 により $J(f) = \hat{\mathbf{C}}$ となり矛盾を得る。 ■

$J(f)$ 上の正値有限測度 $\mu$ が $\delta-$等角密度であるとは、その上で $f$ が単射となるような $J(f)$ の任意のボレル集合 $A$ に対して

$$\mu(f(A)) = \int_A |f'(\zeta)|^\delta d\mu(\zeta)$$

が成立するものをいう。

**注意**　もともと等角密度はパターソン（[5]）によりフックス群の極限集合のハウスドルフ次元を評価するために構成された。それをサリヴァンがクライン群の場合にも使えるように精練し、さらに所謂サリヴァンの辞書と呼ばれる、複素力学系理論とクライン群論の類似性に着目しジュリア集合上の等角密度を定義した（[7]）。

**定理 12** $f$ を有理関数で $F(f) \neq \emptyset$ とする。このとき、ある $\delta$ に対して $\delta$–等角密度が存在する。さらにそのような $\delta$ の下限を $\delta(f)$ とすると

$$0 < \delta(f) \leq 2$$

が成立する。

$t > 0$ に対して $t$ 次元ハウスドルフ測度を $H_t$ と表わす。

**定理 13** $f$ を双曲型有理関数とする。もし $\delta$–等角密度 $\mu$ が存在するのであれば $\delta = \delta(f)$ となり

$$\dim J(f) = \delta(f)$$

となる。さらに $\mu$ と $H_{\delta(f)}$ は同値となり、

$$H_{\delta(f)}(J(f)) > 0$$

となる。

定理 11 と定理 13 より次を得る。

**定理 14** $f$ を双曲型有理関数とすると

$$0 < \dim(J(f)) < 2$$

が成立する。

注意　有理関数 $f$ が、その特異値をすべて $F(f)$ にもち、非反発周期点として吸引周期、または放物的周期しか持たないときも $\mathrm{meas}(J(f)) = 0$ となることが Denker と Urbański ([2]) により示されている。

注意　$f_c(z) = z^2 + c$ とし、$\mathcal{M}$ をマンデルブロー集合とする。宍倉（[6]）により $\dim(J(f_c)) = 2$ となる $c$ の集合は $\partial\mathcal{M}$ 上に稠密に存在することが示されている。

# 3　超越整関数

超越整関数族の部分族として次のものを考える。

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{\lambda e^z \mid \lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\} \\ \mathcal{T} &= \{ae^z + be^{-z} \mid a,\ b \in \mathbf{C}\ ab \neq 0\} \end{aligned}$$

$\mathcal{E}$ を指数関数族、$\mathcal{T}$ を正弦関数族とよぶ。この節ではこれら二つの族に属する超越整関数のジュリア集合の大きさについてのマクマレン（[4]）の結果を紹介する。また部分族

$$\mathcal{S} = \{f \mid f \text{ は超越整関数で } S(f) \text{ が有限集合 }\}$$

に属する関数を有限型と呼ぶ。簡単な計算により $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}, \mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ であることがわかる。このとき次の重要な定理が成立する。

**定理 15** （*[3]*） $f \in \mathcal{S}$ ならば $F(f)$ はベーカー領域も遊走領域も持たない。

**注意** 上の定理より $f \in \mathcal{S}$ ならば $z \in \mathbf{C}$ で $f^n(z) \to \infty$ となるものは $J(f)$ の点であることがわかる。このことに注意してジュリア集合の大きさを評価する。

次のような集合列 $\{E_k\}$ を考える。

$$E_k = \{F_i \mid F_i \ (i = 1,\ 2, \cdots,\ n(k)) \text{ は互いに交わらないコンパクト集合} \}$$

とし、次の条件を満たすとする。

**[C1]** 任意の $F \in E_{k+1}$ に対して、ただ一つの $F' \in E_k$ で $F \subset F'$ となるものが存在する。

**[C2]** 任意の $F \in E_k$ に対して、$F' \in E_{k+1}$ で $F' \subset F$ となるものが存在する。

いま、$\overline{E_k} = \cup_{F \in E_k} F$ と書くことにし、$E = \cap_{k=1}^{\infty} \overline{E_k}$ を考える。

**命題 16** 任意の $k$ と任意の $F \in E_k$ に対して

$$\mathrm{density}(\overline{E_{k+1}},\ F) \geq \delta_k$$

$$\mathrm{diam}(F) \leq d_k$$

とする。このとき次の二つの不等式が成立する。

$$\mathrm{density}(E,\ \overline{E_1}) \geq \prod_{k=1}^{\infty} \delta_k$$

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{k+1} |\log \delta_i|}{|\log d_k|} \geq n - \dim(E)$$

**証明** $\overline{E_{k+1}} \subset \overline{E_k}$ であるから $\cap_{j=1}^{k} \overline{E_j} = \overline{E_k}$ となる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{density}(\cap_{j=1}^{k} \overline{E_j},\ \overline{E_1}) &= \mathrm{density}(\overline{E_k},\ \overline{E_1}) \\
&= \frac{\mathrm{meas}(\overline{E_k})}{\mathrm{meas}(\overline{E_1})} \\
&= \frac{\mathrm{meas}(\overline{E_k})}{\mathrm{meas}(\overline{E_{k-1}})} \frac{\mathrm{meas}(\overline{E_{k-1}})}{\mathrm{meas}(\overline{E_1})} \\
&= \mathrm{density}(\overline{E_k},\ \overline{E_{k-1}}) \mathrm{density}(\overline{E_{k-1}},\ \overline{E_1})
\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}
\mathrm{density}(\overline{E_k},\ \overline{E_{k-1}}) &= \frac{\sum_{F \in E_{k-1}} \mathrm{meas}(\overline{E_k} \cap F)}{\mathrm{meas}(\overline{E_{k-1}})} \\
&= \sum \mathrm{density}(\overline{E_k},\ F) \frac{\mathrm{meas}(F)}{\mathrm{meas}(\overline{E_{k-1}})} \\
&\geq \sum \delta_k \frac{\mathrm{meas}(F)}{\mathrm{meas}(\overline{E_{k-1}})} = \delta_k
\end{aligned}$$

これらより第一式を得る。

次に $\mu_1$ を２次元ルベーグ測度の $\overline{E_1}$ への制限を

$$\mu_1(\overline{E_1}) = 1$$

となるように定数倍したものとする。さらに $\mu_{k+1}$ を帰納的に定義する。$\mu_{k+1}$ を２次元ルベーグ測度の $\overline{E_{k+1}}$ への制限で、各 $F \in E_k$ に対して

$$\mu_{k+1}(\overline{E_{k+1}} \cap F) = \mu_k(F)$$

となるように定数倍したものとする。このように定義すると $\{\mu_k\}$ はただ一つの弱収束極限 $\mu$ をもつ。$\mu$ の台は $E$ であり、$F \in E_k$ に対して

$$\mu(F) \le \frac{\mathrm{meas}(F)}{\delta_1\delta_2\cdots\delta_k}$$

が成立する。

いま、任意の $r > 0$ に対して $d_k > r \ge d_{k+1}$ となる $k$ をとる。$B$ を半径 $r$ の円板とし、

$$\overline{B} = \cup_{F\in E_{k+1},\ F\cap B\neq\emptyset} F$$

とする。このとき

$$\mu(B) \le \mu(\overline{B}) \le \frac{\mathrm{meas}(\overline{B})}{\delta_1\delta_2\cdots\delta_{k+1}} \le Cr^\delta \frac{d_k^{n-\delta}}{\delta_1\delta_2\cdots\delta_{k+1}}$$

となる。ここで $\delta$ を

$$n - \delta \ge \limsup_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k+1} |\log\delta_i|}{|\log d_k|}$$

とすると

$$\frac{d_k^{n-\delta}}{\delta_1\delta_2\cdots\delta_{k+1}} \to 0$$

となる。補題 8 により第２式を得る。 ■

$D$ を有界開集合とし $f$ を $D$ から $\mathbf{C}$ への写像とする。$f$ が有界歪曲であるとはある $c_1$ と $c_2$ が存在して、すべての $x,\ y \in D$ $(x \neq y)$ に対して

$$c_1 < \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} < c_2$$

が成立するときをいう。さらに

$$L(f) = \frac{c_2}{c_1}$$

とおく。$L(f)$ が十分に 1 に近いときに $f$ の歪曲度は小さいという。歪曲度が小さければ原像とその像の相対的な長さや面積はほぼ保たれる。たとえば $X$ を $D$ の可測集合とすれば

$$\mathrm{density}(X,\ D) = \frac{\mathrm{meas}(X)}{\mathrm{meas}(D)} \le L(f)^2 \mathrm{density}(f(X),\ f(D))$$

が成立する。さらに等角写像 $f$ についてはこの歪曲性に関連した量として非線形性 $(\log(f'))' = f''/f'$ がある。$D$ を円板または正方形とし、

$$N(f) = \left(\sup_{z\in D}\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\right)\mathrm{diam}(D)$$

とする。もし、$N(f)$ が小さければ $f$ の歪曲度も小さくなる。実際 $N(f)$ が $0$ に近ければ $L(f)$ は $1+O(N(f))$ でおさえられる。

**定理 17** $f \in \mathcal{T}$ ならば $\mathrm{meas}(J(f)) > 0$ となる。

証明　いま

$$R(h) = \{z \mid |\mathrm{Re}(z)| > h\}$$

とおく。$z \in R(h)$ に対して

$$|f'| > O(e^h), \qquad \left|\frac{f''}{f'}\right| \approx 1$$

となるように $h$ を十分に大きくとる。さらに $R(h)$ に含まれる一辺の長さ $r$ の正方形上で $f$ の歪曲率が小さくなるように $r$ を十分小さくとる。

$g(x) = e^x$ とし、

$$h_k = 2g^k(x)$$

とおく。$B$ を $R(h_k)$ に含まれる正方形とすると、$r$ の定義より、$f(B)$ はほぼ正方形であり、一辺の長さは $e^h$ に比例する。$f(B)\cap R(h_{k+1})$ に含まれる互いに交わらない正方形の集合を $\mathrm{pack}(f(B))$ と表わすと、$f(B)$ が虚軸を中心とする幅 $2h_{k+1}$ の帯と交わる可能性があるので

$$\mathrm{density}(\mathrm{pack}(f(B)),\ f(B)) \geq 1 - O\left(\frac{h_{k+1}}{e^{h_k}}\right)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} E_0 &= \{B_0\} \\ E_k &= \{G \mid G \subset F \in E_{k-1},\ f^k(G) \in \mathrm{pack}(f^k(F))\} \end{aligned}$$

とし

$$E = \cap\overline{E_k} = \{z \mid f^k(z) \in R(h_k)\}$$

とおく。すると $z \in E$ に対して $f^n(z) \to \infty$ であるから $E \subset J(f)$ となる。上と同様にして

$$\mathrm{density}(\cup\mathrm{pack}(f^k(F)),\ f^k(F)) \geq 1 - O\left(\frac{h_{k+1}}{e^{h_k}}\right)$$

を得るが、一様拡大性と一様有界非線形性により、歪曲率が $k$ に依らないことが判るので、すべての $k$ について

$$\mathrm{density}(\overline{E_{k+1}},\ F) \geq 1 - O\left(\frac{h_{k+1}}{e^{h_k}}\right)$$

が成り立つ。したがって

$$\mathrm{density}(E,\ \overline{E_1}) \geq \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - O\left(\frac{h_{k+1}}{e^{h_k}}\right)\right)$$

となる。一方

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h_{k+1}}{e^{h_k}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{g^{k+1}(x)}$$

は $x$ を大きくすることでいくらでも小さくできるので、命題 16 により $E \subset J(f)$ の 2 次元ルベーグ測度が正であることが示される。 ■

**定理 18** $f \in \mathcal{E}$ とすれば $\dim(J(f)) = 2$ である。

証明　$f(z) = \lambda e^z$, $\varphi = \arg\lambda$ とし、

$$\begin{aligned} I &= \cup_{n\in\mathbf{Z}}\left[-\frac{\pi}{4} + 2n\pi - \varphi,\ \frac{\pi}{4} + 2n\pi - \varphi\right] \\ S &= \{z \mid \mathrm{Re}z > x_0,\ \mathrm{Im}z \in I\} \end{aligned}$$

とおく。ここで $z \in S$ に対して

$$|f(z)| \gg 1$$

となるように $x_0$ を十分に大きくとる。また $f''/f' = 1$ である。$r$ を十分小さく取り、$S$ 内の一辺 $r$ の正方形 $B$ 上で $f$ が単射になるようにすれば $f(B)$ はほぼ正方形となる。定理 17 の証明と同様にして

$$\mathrm{density}(f(B),\ S) > \frac{1}{4} - \epsilon$$

を得る。さらに

$$\begin{aligned} E_0 &= \{B_0\} \\ E_k &= \{G \mid G \subset F \in E_{k-1},\ f^k(G) \in \mathrm{pack}(f^k(F))\} \end{aligned}$$

と定義し、

$$E = \cap\overline{E_k} = \{z \mid f^k(z) \in S \text{ for } \forall k\}$$

とすれば $E \subset J(f)$ である。再び、定理 17 の証明と同様にして

$$\mathrm{density}(\cup\mathrm{pack}(f^k(F)),\ f^k(F)) > \frac{1}{4} - \epsilon$$

を得る。したがって $k$ に依らない定数 $\delta$ で

$$\mathrm{density}(\overline{E_{k+1}},\ F) \geq \delta$$

となるものが存在する。ところが $z \in S$ に対して

$$\mathrm{Re}f(z) > O(e^{\mathrm{Re}z})$$

であり、$f'(z)=f(z)$ であるから $z \in F \in E_k$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(f^k(z)) &> O(g^k(1)) \\ \mathrm{diam}F &< d_k = O\left(\frac{1}{g^k(1)}\right) \end{aligned}$$

となる。故に $d_k$ は $\delta^k$ よりも速く 0 に向かうので命題 16 により $E$ のハウスドルフ次元が 2 であることが示される。 ■

**定理 19** $f \in \mathcal{E}$ が吸引周期系をもつならば $\mathrm{meas}(J(f))=0$ となる。

**証明**　まず、任意の $z \in J(f)$ に対して $|(f^n)'(z)| \to \infty$ $(n \to \infty)$ を示すことができる。さらに円板 $B_\alpha$ の可算族で、次を満たすものが取れる；その半径の列が非有界となるもので、各 $z \in J(f)$ に対して $z$ の近傍の列 $\{U_n\}$ で $\mathrm{diam}U_n \to 0$ かつ $f^n(U_n) \in \{B_\alpha\}$ を満たし、さらに $U_n$ 上で歪曲率が一様に有界となるものがとれる。このことと十分大なる $x_0$ に対して $\{z \mid \mathrm{Re}z < -x_0\}$ が $F(f)$ に含まれることより、ある定数 $a$ で

$$\mathrm{density}(J(f),\ B_\alpha) < a < 1$$

なるものが取れる。したがって題意を得る。 ■

# 参考文献


[1] A. F. Beardon, Iteration of Rational Functions, GTM 132, Springer, 1991.

[2] M. Denker & M. Urbański, Hausdorff and conformal measures on Julia sets with a rationally indifferent periodic point, J. London Math. Soc. (2), 43(1991), 107-118.

[3] A. E. Eremenko & M. Yu. Lyubich, Dynamical properties of some classes of entire functions, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 42(1992), 989-1020.

[4] C.McMullen, Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions, Trans. A. M. S., vol 300(1987), 329-342

[5] S. J. Patterson, The limit set of a Fuchsian group, Acta Math., 136(1976), 241-273.

[6] M. Shishikura, The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets, SUNY preprint # 1991/7.

[7] D. Sullivan, Conformal dynamical systems, Geometric Dynamics, Lecture Notes in Math., vol 1007, Springer-Verlag, 1983, 725-752.

[8] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphism and dynamics I: Solution of Fatou-Julia problem on wandering domains, Ann. of Math. (2), 122(1985), 401-418.

[9] 上田, 谷口, 諸澤、複素力学系序説、培風館、1995.