象眼指数関数のジュリア集合について

諸澤　俊介
(Shunsuke Morosawa)
高知大学理学部数学科
(Department of Mathematics, Faculty of Science, Kochi University)

1　序

f を超越整関数とする。$z \in \mathbb{C}$ のある近傍で $\{f^n\}$ が正規族となるような点 z の集合を f のファトウ集合と呼び、$F(f)$ で表す。さらに $F(f)$ の $\hat{\mathbb{C}}$ における補集合 $\hat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$ を f のジュリア集合と呼び、$J(f)$ で表す。$F(f)$ の完全不変性とピカールの定理により $\mathbb{C} \setminus F(f)$ は $\mathbb{C}$ の非有界閉集合となるが $J(f)$ は $\hat{\mathbb{C}}$ のコンパクト集合である。真性特異点である無限遠点の近傍ではジュリア集合は複雑となる。例えば、非有界なファトウ成分の境界の複雑さを示した木坂の結果（[3]）がある。そこでは、非有界な直接鉢、放物的鉢等の境界は局所連結でないことが示されている。一方、スタッラドは超越整関数の位数に注目して、ファトウ集合の各成分が有界となる十分条件を示した（[5]）。この小論でもファトウ成分が有界となる超越整関数を考えたい。

2　基本的性質

この節では、この小論で必要な超越整関数の力学系の基本事項を述べる。証明は [8] 等を参照して欲しい。

$w \in \mathbb{C}$ が、ある自然数 p に対して $f^p(w) = w$ となるときに f の周期点と言う。 さらに $1 < q \leq p$ となる自然数 q に対して $f^q(w) \neq w$ となるときに p をその周期成分の周期と呼ぶ。特に、周期 1 の周期点を不動点と呼ぶ。

定義　f の周期 p の周期点 w に対して

$$a = (f^p)'(w)$$

を w での f の乗法因子と呼ぶ。さらに

(1) $|a| > 1$ のときに w を f の反発周期点と呼ぶ。
(2) $|a| < 1$ のときに w を f の吸引周期点と呼ぶ。
(3) $|a| = 1$ のときに w を f の中立周期点と呼ぶ。さらに $a^m = 1$ となる自然数 m が存在するときに、中立周期点 w は有理的であるといい、そうでないときは無理的であるという。有理的中立周期点は放物的周期点とも呼ばれる。

命題 1 反発周期点はジュリア集合に属し、吸引周期点はファトウ集合に属する。

$z \in \mathbb{C}$ が超越整関数 f の非特異値であるとは z のある近傍で f^{-1} のすべての分枝が 1 価にとれるときをいい、そうでないときに特異値という。特異値の集合を $\mathrm{sing}(f^{-1})$ で表す。すなわち

$$\mathrm{sing}(f^{-1}) = \{f \text{ の臨界値または漸近値}\}$$

である。

ファトウ成分 D が、ある自然数 p に対して $f^p(D) \subset D$ となるときに f の周期成分と言う。 さらに $1 < q \leq p$ となる自然数 q に対して $f^q(D) \cap D = \emptyset$ となるときに p をその周期成分の周期と呼ぶ。次の周期成分の分類定理が成立する。

定理 2 f を超越整関数とし、D を周期 p の f の周期成分とする。このとき以下のいずれかが成立する。

(1) D は周期 p の吸引周期点を含む。また、D 内には少なくともひとつ $\mathrm{sing}(f^{-1})$ の点を含む。このとき D を吸引周期成分と呼ぶ。
(2) ∂D 上に放物的周期点 w が存在して D 上 $\{f^{np}\}_{n=1}^{\infty}$ が w に広義一様収束する。また、D 内には少なくともひとつ $\mathrm{sing}(f^{-1})$ の点を含む。このとき D を放物的周期成分と呼ぶ。
(3) D は無理的中立周期点を含む。また $\partial D \subset \overline{\cup_{n\geq 1} f^n(\mathrm{sing}(f^{-1}))}$ となる。このとき D をジーゲル円板と呼ぶ。

(4) D は非有界であり、$\{f^{np}\}_{n=1}^{\infty}$ が ∞ に広義一様収束する。このとき D をベーカー領域と呼ぶ。

ファトウ成分 D が任意の自然数 n、m $(n \neq m)$ に対して $f^n(D) \cap f^m(D) = \emptyset$ となるとき D を f の遊走領域と呼ぶ。遊走領域の非存在定理として次が成立する。

定理 3 $\mathrm{sing}(f^{-1})$ が有限集合ならば f は遊走領域を持たない。

さらにベーカー領域の非存在定理として次が成立する。

定理 4 $\mathrm{sing}(f^{-1})$ が有界集合ならば f はベーカー領域を持たない。

特異値集合が有限集合となるような超越整関数の族を $\mathcal{S}$ と書くことにする。したがって $\mathcal{S}$ の元は遊走領域もベーカー領域も持たない。

今

$$I_f = \{z \in \mathbb{C} \mid \lim_{n\to\infty} f^n(z) = \infty\}$$

とおき、f の発散点集合と呼ぶ。f を多項式とすると原点を中心とする十分大きな円板の外で $\{f^n\}_{n=1}^{\infty}$ は ∞ に一様収束するので ∞ は $F(f)$ の点であり、さらに $I_f \subset F(f)$ である。一方超越整関数に対して次が成立する。

定理 5 f を超越整関数とする。このとき、$I_f \neq \emptyset$ であり、さらに $J(f) = \partial I_f$ かつ $I_f \cap J(f) \neq \emptyset$ が成立する。

さらに次が成立する。

定理 6 $\mathrm{sing}(f^{-1})$ が有界集合であるならば $J(f) = \overline{I_f}$ である。

一方、f の周期点の集合が $J(f)$ で稠密なことが知られている。これより、超越整関数のジュリア集合には軌道が有界となる周期点の集合と軌道が無限大に逃げていく発散点集合という全く異なる性質を持ったふたつの集合がともに稠密に存在していることがわかる。このふたつの集合に注目したジュリア集合の特徴付けを与えるのがカントールの花束である。

自然数 N に対して

$$\Sigma_N = \{\underline{s} = (s_0, s_1, s_2, \cdots) \mid s_j \in \mathbb{Z},\ |s_j| \leq N\}$$

とおき、シフト写像 $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$ を

$$\sigma((s_0, s_1, s_2, \cdots)) = (s_1, s_2, \cdots)$$

で定義する。

定義　超越整関数 f に対して、$J(f)$ の不変集合 C_N が f の N—カントールの花束であるとは次の (1) ~ (4) を満たすことである。

(1) 同相写像 $h : \Sigma_N \times [0,\ \infty) \to C_N$ が存在する。
(2) 自然な射影 $\pi : \Sigma_N \times [0,\ \infty) \to \Sigma_n$ に対して

$$\pi \circ h^{-1} \circ f \circ h(\underline{s},\ t) = \sigma(\underline{s})$$

が成立する。
(3) 各 $\underline{s} \in \Sigma_N$ に対して、$\lim_{t\to\infty} h(\underline{s},\ t) = \infty$ となる。
(4) $t \neq 0$ であれば $\lim_{n\to\infty} f^n(h(\underline{s},\ t)) = \infty$ となる。

定理 **7** $E(z) = \lambda e^z$ $(0 < \lambda < 1/e)$ とすると、$J(E)$ は N—カントールの花束を含む。

さらに $E(z)$ に対して $C_N \subset C_{N+1}$ となるように N—カントールの花束を構成することができて

$$\overline{\cup_{N\geq 1} C_N}$$

を $E(z)$ のカントールの花束と呼ぶ。このとき次が成立する。

定理 **8** $E(z)$ のカントールの花束は $J(E)$ と一致する。

3　吸引成分の境界

超越整関数 f の特異値について次の 2 つの条件をつける。

[SV1] $F(f)$ に存在する特異値は臨界点のみで、それらはすべて吸引周期に吸収される。

[SV2] $J(f)$ に存在する特異値 ζ に対しては

$$\overline{\cup_{n\geq 0} f^n(\zeta)} \cap \overline{D} = \emptyset$$

が各ファトウ成分 D について成立する。

さらに

$$\mathcal{SV} = \{f \in \mathcal{S} \mid f \text{ は [SV1] と [SV2] をみたす。}\}$$

とおく。このとき $\mathcal{SV}$ の元であるならば、そのファトウ集合の周期成分は吸引周期のみであることに注意する。

次の定理が双曲型有理関数の単連結ファトウ成分の境界についての結果と同様にして示すことができる。([1] 参照)

定理 9 D を $f \in \mathcal{SV}$ の周期成分とする。もし D が有界であるならば ∂D はジョルダン曲線となる。

さらにホワイバーンの定理を用いて次を示すことができる。([7] 参照)

定理 10 $f \in \mathcal{SV}$ とする。もし $F(f)$ のすべての周期成分が有界であるならば $J(f)$ は局所連結となる。

4 例

この節では、次の例を確かめる。

例 1 実数 λ は

$$\lambda^2 = e^{\frac{\lambda}{e}+1} \qquad f(-1) \neq -1 \tag{1}$$

を満たすとし

$$f(z) = \lambda z e^z$$

とする。このとき $F(f)$ の各成分は有界であり、その境界はジョルダン曲線となる。さらに $J(f)$ は局所連結となる。

まず、各成分が有界となることを示す。

f の特異値は

$$0 \qquad \text{と} \qquad f(-1)$$

である。すなわち、$f \in \mathcal{S}$ である。したがって遊走領域とベーカー領域は存在しない。

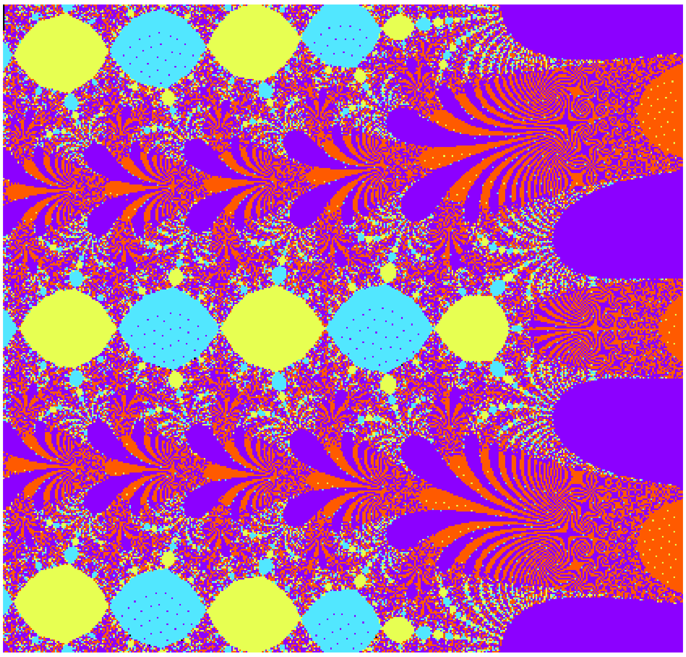

図 1: $f(z) = \lambda z e^z$ のファトウ集合

関係式 (1) をみたす λ はただひとつ存在して $e^2 < \lambda < e^3$ を満たす。このとき

$$f(0) = 0 \qquad |f'(0)| = |\lambda| > 1$$

であるから、0 は反発不動点である。さらに (1) により

$$f^2(-1) = -1 \qquad f(-1) \neq -1 \qquad (f^2)'(-1) = 0$$

となるので $\{-1,\ f(-1)\}$ は吸引 2 周期である。他に特異値はないので、任意の $F(f)$ の点は、この吸引 2 周期に吸い込まれる。今 ζ を含む $F(f)$ の成分を D_ζ と書くことにすれば、D_{-1} が有界となることを示せば良い。

$x > 0$ に対して

$$f^n(x) \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

であるから $x>0$ は $J(f)$ に属する。$C=\{x \mid x \geq 0\}$ とすれば $C \subset J(f)$ であり、$f^{-1}(C) \subset J(f)$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} C_+ &= \left\{ z = x+iy \,\middle|\, x = -y\frac{\cos y}{\sin y}, \quad \pi < y < 2\pi \right\} \\ C_- &= \left\{ z = x+iy \,\middle|\, x = -y\frac{\cos y}{\sin y}, \quad -\pi > y > -2\pi \right\} \end{aligned}$$

とおくと $f(C_+),\ f(C_-) \subset C$ であるから $C_+,\ C_- \subset J(f)$ である。故に、D_{-1} と $D_{f(-1)}$ は C_+ と C_- の間 S に存在する。

今、$a>0$ を

$$ae^2 > a^2 + 4\pi^2$$

となるようにとり、

$$R_a = \{z \mid \mathrm{Re}\ z > a\}$$

とおく。このとき $z \in R_a$ に対して

$$|f(z)| > \lambda a e^a > a e^{a+2}$$

となる。ここで $(D_{-1} \cup D_{f(-1)}) \cap R_a \neq \emptyset$ とし、$z \in (D_{-1} \cup D_{f(-1)}) \cap R_a$ をとると

$$\mathrm{Re}\ f(z) > a$$

となる。一方 $z \in D_{-1}$ に対しては

$$f^{2n}(z) \to -1 \qquad\qquad (n \to \infty)$$

であるから、矛盾を得る。したがって $z \in D_{-1} \cup D_{f(-1)}$ に対して

$$\mathrm{Re}\ z < a$$

となる。

また、$0 \in \partial D_{-1}$ とすると $0 \in \partial D_{f(-1)}$ となる。ここで $f(C)=C$ であるから、原点の近傍で D_{-1}、$D_{f(-1)}$、C の順序は f により逆転するが、これは矛盾である。したがって、適当な正数 ϵ に対して、$U_\epsilon = \{z \mid |z| < \epsilon\}$ とおくと

$$(D_{-1} \cup D_{f(-1)}) \cap U_\epsilon = \emptyset$$

となる。さらに $b < 0$ を

$$\lambda(2\pi + |b|)e^b < \epsilon$$

となるように取り

$$L_b = \{z \mid \mathrm{Re}\ z < b\}$$

とおく。このとき $z \in L_b \cap S$ に対して

$$f(z) \in U_\epsilon$$

となるので

$$L_b \cap (D_{-1} \cup D_{f(-1)}) = \emptyset$$

となる。したがって

$$D_{-1} \subset S \cap \{z \mid b < \mathrm{Re}\ z < a\}$$

を得る。

後半の主張は定理 9 と定理 10 から従う。

5 象眼指数関数

次の関数族を考える。

$$\mathcal{D} = \{P(z)\exp(z) \mid P(z) \text{ は多項式 }\}$$

$$\mathcal{D}_k = \{P(z)\exp(z) \mid P(z) \text{ は } k \text{ 次の多項式 }\}$$

これらを象眼指数関数、k 次象眼指数関数と呼ぶ。([6] 参照)

$\mathcal{D}_k$ の各元は、ただひとつの漸近値 0 と重複も込めて k 個の臨界値をもつ。

さて、4 節の正の実軸はカントールの花束の茎であるが同様のものが象眼指数関数にも見いだせる。

補題 11 $f(z) = \lambda z e^z$、$\arg\lambda = \theta$ とする。$s \in \mathbf{Z}$ に対して次を満たす曲線 $L_s(t)$、$t \in [0,\ \infty)$ が存在する。

(1) $f(L_s(t)) = L_s(t)$
(2) 十分大きな h に対して、次が成立する。

$$L_s(t) \cap R_h \subset \{z \mid (2s-1)\pi - \theta < \mathrm{Im}\ z < (2s+1)\pi - \theta\}$$

(3) $L_s(0)$ は f の不動点となる。
(4) $t \neq 0$ に対して、次が成立する。

$$f^n(L_s(t)) \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

例 1 を示した方法と同様にして、次を示すことができる。

定理 12 $f(z) = \lambda z e^z$ が周期 2 以上の吸引周期をもつと仮定する。もし $L_0(0) = 0$ であるならば、$F(f)$ の各成分は有界であり、その境界はジョルダン曲線となる。さらに $J(f)$ は局所連結となる。

さらに

$$f(z) = \lambda\{z - (1+a)\}e^z$$

という形の象眼指数関数を考えてみる。このとき

$$\mathrm{sing}(f^{-1}) = \{0,\ f(a) = -\lambda e^a\}$$

である。

今、$a \neq -1$ とし、0 が吸引不動点に吸収されるとする。このとき、$f(a)$ が他の吸引周期に吸収されると仮定すると、この吸引周期に対応する 2 次多項式類似写像が見いだせる。そして、その 2 次多項式類似写像の充填ジュリア集合の境界にカントールの花束 C_2 の花冠が張り付いているのが見える。(図 2 参照)

参考文献

[1] Beardon A. F., Iteration of Rational Functions, Grad. Texts Math. 132, Springer 1991.

[2] N. Fagella, Limiting dynamics for the complex standard family, Int. J. Bifurcation and Chaos, 5(1995), 673-699.

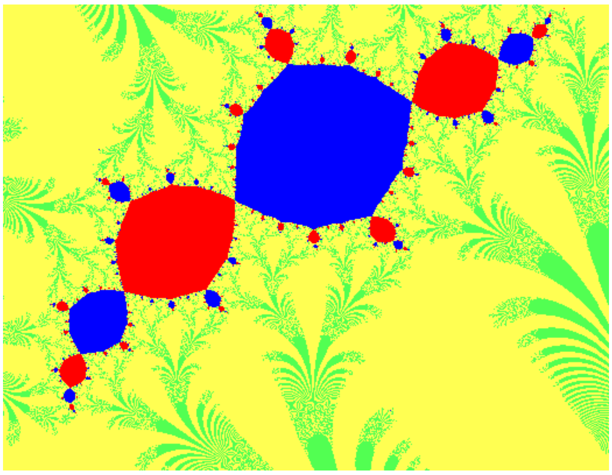

図 2: $\lambda = 0.0577688 - 0.0721882i \qquad a = 4 - 2.8i$

[3] M. Kisaka, On the connectivity of Julia sets of transcendental entire functions, preprint.

[4] T. Kuroda & M. Jang, Julia set of the function $z\exp(z+\mu)$ II, Tôhoku Math. J., 49(1997), 577-584.

[5] G. M. Stallard, The iteration of entire functions of small growth, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 114(1993), 273-298.

[6] M. Taniguchi, Topological completeness of decorated exponential families, preprint.

[7] Whyburn, G. T., Analytic Topology, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 28(1942).

[8] 上田、谷口、諸澤、 複素力学系序説、 培風館、 1997.